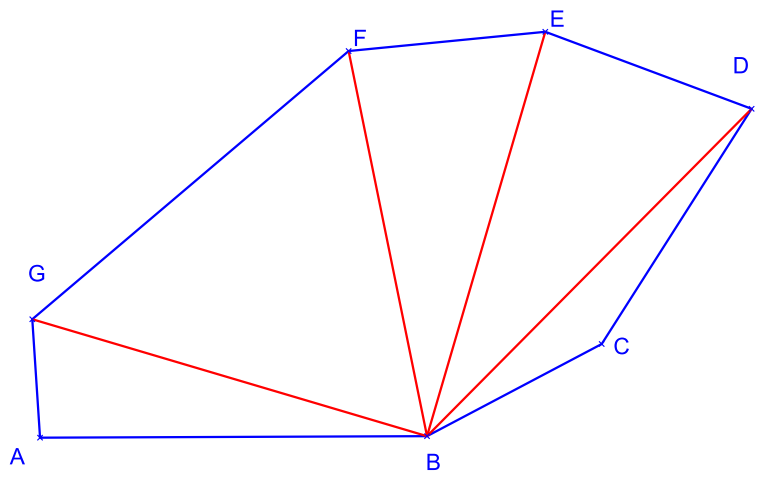
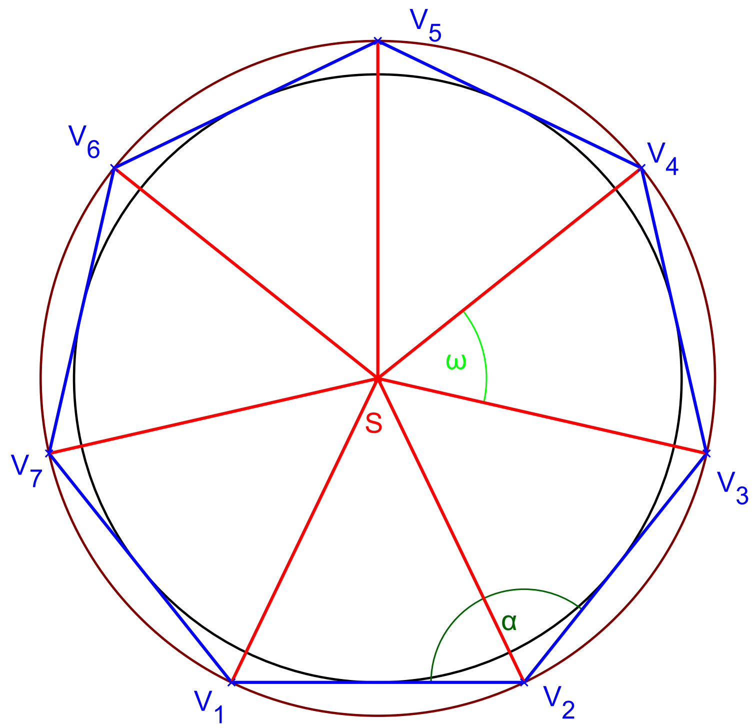
Obvod a obsah nepravidelného a pravidelného mnohouholníka

Ak máme nepravidelný mnohouholník, tak skúsime ho rozdeliť na útvary, ktorým vieme vypočítať obsah z daných údajov – najvšeobecnejší spôsob: rozdeliť na trojuholníky.



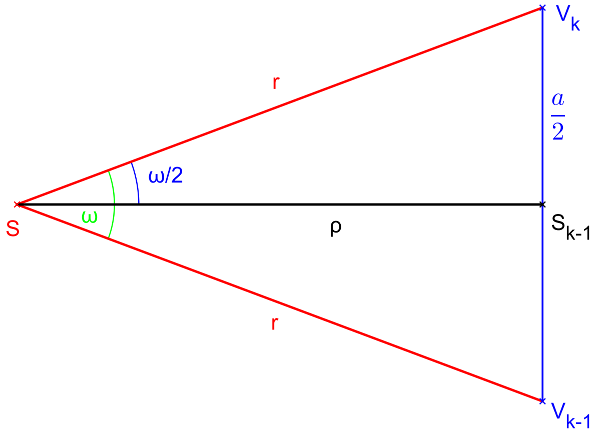
Pravidelný mnohouholník je jednoznačne daný s počtom strán (vrcholov) a s jedným z troch nasledujúcich údajov: dĺžka strany, polomer vpísanej kružnice a polomer opísanej kružnice (alebo dĺžkou najkratšej uhlopriečky). Každý pravidelný n-uholník môžeme rozdeliť na n zhodných rovnoramenných trojuholníkov. Z počtu strán vieme vypočítať ω: uhol ramien (stredový uhol) a pomocou toho α: vnútorný uhol.



$\omega = \frac{360°}{n}$

$\alpha = \frac{n-2}{n}.180° = 180° - \omega$

o = n.a



Aby sme mohli vypočítať obsah pravidelného n-uholníka, vypočítame obsah jedného rovnoramenného trojuholníka. Klasický vzorec:

$$S_{\triangle} = \frac{a.v_a}{2}$$

v trojuholníku výška na stranu a je vlastne polomer vpísanej kružnice ρ → dosadíme

$$S_{\triangle} = \frac{a.\rho}{2}$$

ak chceme vzorec obsahujúci iba jeden údaj z tých dvoch, musíme ich spojiť v ďalšom vzťahu – využijeme goniometrickú funkciu v pravouhlom trojuholníku V_kSS_{k-1}

jedna odvesna je polovica strany $\left(\frac{a}{2}\right)$, druhá je polomer vpísanej kružnice (ρ) a uhol je polovica stredového uhla pravidelného n-uholníka $\left(\frac{\omega}{2}\right)$ ⇒ použijeme funkciu tangens

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\rho} = \frac{a}{2\rho}$$

z toho vyjadríme raz polomer, dosadíme do klasického vzorca a dostaneme vzorec na výpočet obsahu zo strany

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \frac{a}{2\rho} \qquad /.\rho$$

$$\rho.\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \frac{a}{2} \qquad /:\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$$

$$\rho = \frac{a}{2.\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}$$

$$S_{\triangle} = \frac{a.\rho}{2} = \frac{a.\frac{a}{2.\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}}{2} = \frac{a^2}{4.\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}$$

a, ak je daná strana a n-uholníka

$$S = \frac{1}{4}n.a^2.\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}} = \frac{1}{4}n.a^2.\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}$$

potom vyjadríme stranu, dosadíme a dostaneme vzorec na výpočet obsahu z polomeru vpísanej kružnice

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \frac{a}{2\rho} \qquad /.2\rho$$

$$2\rho.\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = a$$

$$S_{\triangle} = \frac{a.\rho}{2} = \frac{2\rho.\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}.\rho}{2} = \rho^2.\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$$

b, ak je daný polomer vpísanej kružnice ρ n-uholníka

$$S = n.\rho^2.\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$$

ak použijeme vzorec na výpočet obsahu trojuholníka z dvoch strán a nimi zovretého uhla, dostaneme tretí vzťah

$$S_{\triangle} = \frac{ab.\sin\gamma}{2}$$

tie dve strany sú ramená, ktorá má dĺžku polomer opísanej kružnice r a nimi zovretý uhol je stredový uhol n-uholníka ω

$$S_{\triangle} = \frac{r.r.\sin\omega}{2} = \frac{r^2.\sin\omega}{2}$$

c, ak je daný polomer opísanej kružnice r n-uholníka

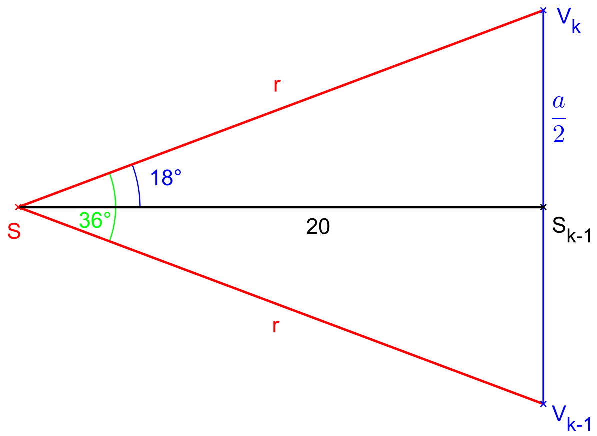
$S = \frac{1}{2} n.r^2.\sin\omega$

ďalšie vzťahy

počet uhlopriečok	$m = \frac{n.(n-3)}{2}$
strana	$a = 2\sqrt{r^2 - \rho^2} = 2r.\sin\frac{\omega}{2} = 2\rho.\mathrm{tg}\,\frac{\omega}{2} = \frac{e_1}{2.\cos\frac{\omega}{2}}$
polomer vpísanej kružnice	$\rho = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}} = r.\cos\frac{\omega}{2} = \frac{e_1}{4.\sin\frac{\omega}{2}}$
polomer opísanej kružnice	$r = \sqrt{\rho^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2\sin\frac{\omega}{2}} = \frac{\rho}{\cos\frac{\omega}{2}} = \frac{e_1}{2.\sin\omega}$
najkratšia uhlopriečka	$e_1 = 2a.\cos\frac{\omega}{2} = 4\rho.\sin\frac{\omega}{2} = 2r.\sin\omega$

príklad:

Vypočítajte vnútorný uhol α desaťuholníka, stranu a, obvod o, polomer r a obsah S, ak je daný polomer ρ = 20 kružnice vpísanej desaťuholníku.



$\omega = \frac{360°}{10} = 36°$

$\alpha = 2.\frac{180°-\omega}{2} = 180° - 36° = 144°$

$\mathrm{tg}\,\frac{\omega}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\rho} \longrightarrow a = 2.\rho.\mathrm{tg}\,\frac{\omega}{2} = 2.20.\mathrm{tg}\,18° = 12{,}997$

$o = 10.a = 10.12{,}997 = 129{,}968$

$\cos\frac{\omega}{2} = \frac{\rho}{r} \longrightarrow r = \frac{\rho}{\cos\frac{\omega}{2}} = \frac{20}{\cos 18°} = 21{,}029$

$S = 10.\frac{a.\rho}{2} = 10.\frac{12{,}997.20}{2} = 1\,299{,}68$

Vypočítajte obvod o a obsah S pravidelného osemuholníka, ak je dané a, r = 16; b, ρ = 12; c, a = 8.

$\omega = \frac{360°}{8} = 45°$

$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{r} \longrightarrow a = 2.r.\sin\frac{\omega}{2} = 2.16.\sin 22{,}5° = 12{,}246$

$o = 8.a = 8.12{,}246 = 97{,}967$

$S_\triangle = \frac{r^2.\sin\omega}{2} = \frac{16^2.\sin 45°}{2} = 90{,}510$

$S = 8.S_\triangle = 8.90{,}510 = 724{,}077$

$\mathrm{tg}\,\frac{\omega}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\rho} \longrightarrow a = 2.\rho.\mathrm{tg}\,\frac{\omega}{2} = 2.12.\mathrm{tg}\,22{,}5° = 9{,}941$

$o = 8.a = 8.9{,}941 = 79{,}529$

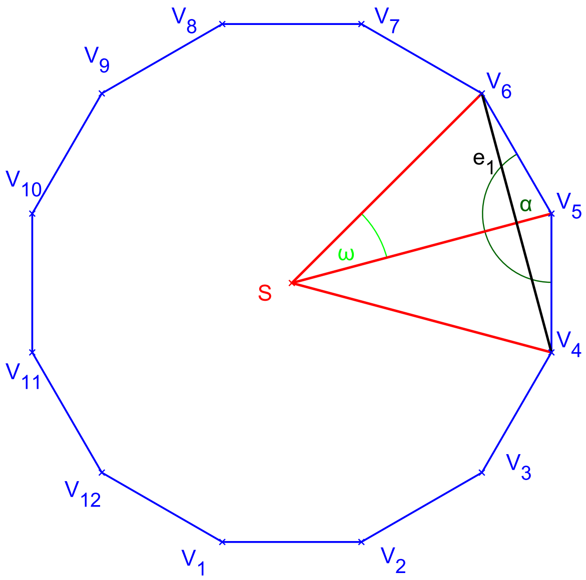
$S = 8.\frac{a.\rho}{2} = 8.\frac{9{,}941.12}{2} = 477{,}174$

$o = 8.a = 8.8 = 64$

$\mathrm{tg}\,\frac{\omega}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\rho} \;\longrightarrow\; \rho = \frac{a}{2.\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}} = \frac{8}{2.\mathrm{tg}\,22{,}5°} = 9{,}657$

$S = 8.\frac{a.\rho}{2} = 8.\frac{8.9{,}657}{2} = 309{,}019$

Vypočítajte obvod o a obsah S pravidelného dvanásťuholníka, ak je dĺžka najkratšej uhlopriečky $e_1 = 14$.



$\omega = \frac{360°}{12} = 30°$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{e_1}{2}}{a} = \frac{e_1}{2a} \;\longrightarrow\; a = \frac{e_1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{14}{2\sin 75°} = 7{,}247$

$o = 12.a = 12.7{,}247 = 86{,}963$

$\sin\omega = \frac{\frac{e_1}{2}}{r} = \frac{e_1}{2r} \;\longrightarrow\; r = \frac{e_1}{2\sin\omega} = \frac{14}{2\sin 30°} = 14$

$S_\triangle = \frac{r^2.\sin\omega}{2} = \frac{14^2.\sin 30°}{2} = 49$

$S = 12.S_\triangle = 12.49 = 588$

$\alpha = 2.\frac{180°-\omega}{2} = 180° - 30° = 150°$