Súčtové vzorce

Súčtové vzorce sú goniometrické hodnoty súčtov a rozdielov dvoch uhlov. Sem patria aj goniometrické hodnoty dvojnásobného a polovičného uhla. K tým som priradil aj súčet a rozdiel goniometrických funkcií.

V. (súčtové vzorce)

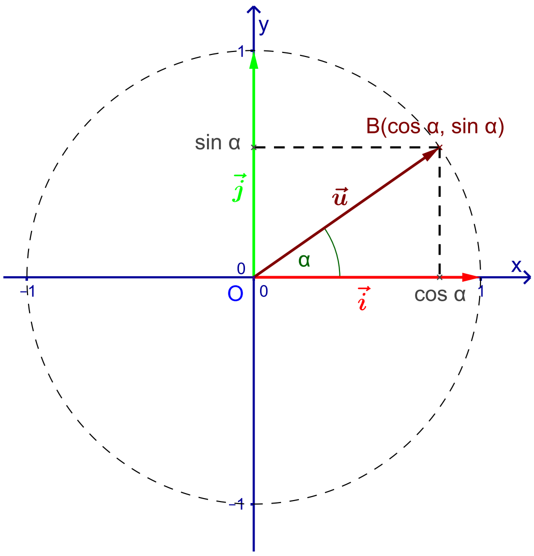
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha.\mathrm{tg}\,\beta}$$
$$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha.\mathrm{tg}\,\beta}$$
$$\mathrm{cotg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{cotg}\,\alpha.\mathrm{cotg}\,\beta - 1}{\mathrm{cotg}\,\beta + \mathrm{cotg}\,\alpha}$$
$$\mathrm{cotg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{cotg}\,\alpha.\mathrm{cotg}\,\beta + 1}{\mathrm{cotg}\,\beta - \mathrm{cotg}\,\alpha}$$

Dôkaz prvého vzorca využije doteraz neprebraté pojmy a vety (vektory, lineárna kombinácia vektorov a skalárny súčin vektorov), ale v druhom ročníku neskoršie aj tieto pojmy vyjasníme.

Dô. (4)

dokážeme najprv štvrtý vzťah – kosínus rozdielu



daná je jednotková kružnica v súradnicovej sústave a jednotkový vektor $\vec{u}$ v základnom umiestnení: vektor je určený orientovanou úsečkou $\overrightarrow{OB}$

tento vektor určí orientovaný uhol α

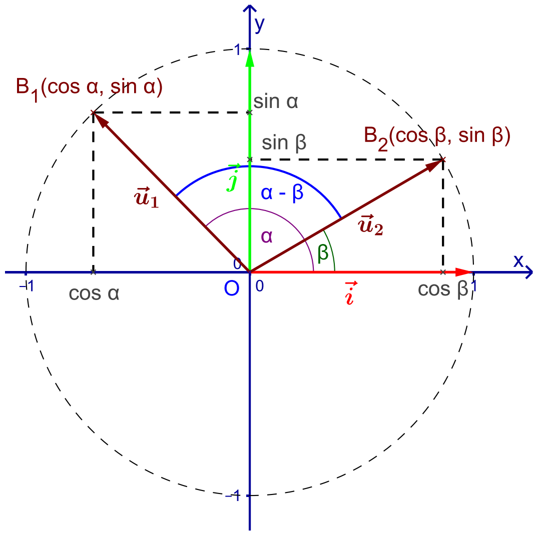
koncový bod B leží na jednotkovej kružnici a preto má súradnice B $(\cos\alpha; \sin\alpha)$

keďže vektor je v základom umiestnení, súradnice vektora sú totožné so súradnicami koncového bodu B – vektor $\vec{u}$ má súradnice $\vec{u}\ (\cos\alpha; \sin\alpha)$

ďalej sú dané jednotkové vektory $\vec{i}$ a $\vec{j}$ v smere x-ovej a y-ovej osi – báza

potom vektor $\vec{u}$ môžeme vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov $\vec{i}$ a $\vec{j}$

$$\vec{u} = \cos\alpha.\vec{i} + \sin\alpha.\vec{j}$$



teraz zoberme dva jednotkové vektory $\vec{u}_1$ a $\vec{u}_2$, ktoré určia dva orientované uhly: α a β
preto tými jednotkovými vektormi zvieraný uhol bude α – β
skalárny súčin vektorov môžeme vypočítať viacerými spôsobmi:

1. spôsob: súčin veľkostí vektorov vynásobíme kosínusovou hodnotou nimi zovretého uhla
   $\vec{u}_1 . \vec{u}_2 = |\vec{u}_1| . |\vec{u}_2| . \cos(\alpha - \beta) = 1.1.\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta)$
2. spôsob: (zo súradníc vektorov – kompozícia komponentov) vynásobíme jednotlivé súradnice a sčítame ich
   $\vec{u}_1 . \vec{u}_2 = (\cos\alpha; \sin\alpha).(\cos\beta; \sin\beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta$

nakoľko ide o skalárny súčin tých istých vektorov, mali by sme dostať tú istú hodnotu → môžeme písať rovnosť výsledkov

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta$

Dô. (3, 1, 2)

pokračujeme s tretím vzťahom – kosínus súčtu
jednoducho namiesto – β dosadíme – (-β), čiže + β
potom využijeme párnosť a nepárnosť funkcií:

$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(-x) = \cos x$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha.\cos(-\beta) + \sin\alpha.\sin(-\beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.(-\sin\beta) =$
$\cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$

dokážeme prvý vzťah – sínus súčtu
teraz využijeme vzťah pre doplnkové uhly: $\sin x = \cos(90° - x)$ a $\cos x = \sin(90° - x)$

$\sin(\alpha + \beta) = \cos[90° - (\alpha + \beta)] = \cos(90° - \alpha - \beta) = \cos[(90° - \alpha) - \beta] =$

podľa už dokázaného vzťahu

$= \cos(90° - \alpha).\cos\beta + \sin(90° - \alpha).\sin\beta = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$

dokážeme druhý vzťah – sínus rozdielu
do prvého vzťahu namiesto β dosadíme -β a využijeme párnosť a nepárnosť funkcií

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha.\cos(-\beta) + \cos\alpha.\sin(-\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.(-\sin\beta) = \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta$

Dô. (5, 6)

pokračujeme s piatym vzťahom – tangens súčtu
tangens vyjadríme pomocou sínusu a kosínusu
potom využijeme už dokázané vety

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta} =$$

každý člen v zlomku vydelíme s cos α.cos β

$$= \frac{\frac{\sin\alpha.\cos\beta}{\cos\alpha.\cos\beta} + \frac{\cos\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha.\cos\beta}{\cos\alpha.\cos\beta} - \frac{\sin\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.\frac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta}$$

šiesty vzťah – tangens rozdielu
podobne postupujeme ako pri druhom a treťom – nahradíme β s -β a využijeme nepárnosť funkcie

$\text{tg}(-x) = -\text{tg}\, x$

$\text{tg}(\alpha - \beta) = \text{tg}[\alpha + (-\beta)] = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}(-\beta)}{1 - \text{tg}\,\alpha\,.\text{tg}(-\beta)} = \frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1 + \text{tg}\,\alpha.\text{tg}\,\beta}$

Dô. (7, 8)

siedmy vzťah – kotangens súčtu

tu vydelíme členy so $\sin\alpha.\sin\beta$

$$\text{cotg}(\alpha+\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta}{\sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta} = \frac{\frac{\cos\alpha.\cos\beta}{\sin\alpha.\sin\beta} - \frac{\sin\alpha.\sin\beta}{\sin\alpha.\sin\beta}}{\frac{\sin\alpha.\cos\beta}{\sin\alpha.\sin\beta} + \frac{\cos\alpha.\sin\beta}{\sin\alpha.\sin\beta}} = \frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.\frac{\cos\beta}{\sin\beta} - 1}{\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\text{cotg}\,\alpha.\text{cotg}\,\beta - 1}{\text{cotg}\,\beta + \text{cotg}\,\alpha}$$

ôsmy vzťah – kotangens rozdielu

podobne postupujeme ako pri druhom a treťom – nahradíme β s $-\beta$ a využijeme nepárnosť funkcie

$\text{cotg}(-x) = -\text{cotg}\, x$

$$\text{cotg}(\alpha - \beta) = \text{cotg}[\alpha + (-\beta)] = \frac{\text{cotg}\,\alpha.\text{cotg}(-\beta) - 1}{\text{cotg}(-\beta) + \text{cotg}\,\alpha} = \frac{-\text{cotg}\,\alpha.\text{cotg}\,\beta - 1}{-\text{cotg}\,\beta + \text{cotg}\,\alpha} = \frac{\text{cotg}\,\alpha.\text{cotg}\,\beta + 1}{\text{cotg}\,\beta - \text{cotg}\,\alpha}$$

V. (goniometrické funkcie dvojnásobného uhla)

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\text{tg}\, 2\alpha = \frac{2\text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}$

$\text{cotg}\, 2\alpha = \frac{\text{cotg}^2\alpha - 1}{2\text{cotg}\,\alpha}$

Dô.

v súčtových vzorcoch nahradíme β s α

$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha.\cos\alpha + \cos\alpha.\sin\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha.\cos\alpha - \sin\alpha.\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\text{tg}\, 2\alpha = \text{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}\,\alpha\,.\text{tg}\,\alpha} = \frac{2\text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}$

$\text{cotg}\, 2\alpha = \text{cotg}(\alpha + \alpha) = \frac{\text{cotg}\,\alpha.\text{cotg}\,\alpha - 1}{\text{cotg}\,\alpha + \text{cotg}\,\alpha} = \frac{\text{cotg}^2\alpha - 1}{2\text{cotg}\,\alpha}$

V. (goniometrické funkcie polovičného uhla)

$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ $\qquad \left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ $\qquad \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ $\qquad \left|\text{tg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

$\text{cotg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$ $\qquad \left|\text{cotg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$

P. znamienko na pravej strane závisí od toho, že z ktorej štvrtiny je uhol

	I. (0° – 90°)	**II.** (90° – 180°)	**III.** (180° – 270°)	**IV.** (270° – 360°)
sin x	+	+	–	–
cos x	+	–	–	+
tg x	+	–	+	–
cotg x	+	–	+	–

Dô.

využijeme kosínus dvojnásobného uhla pre uhol $\frac{\alpha}{2}$

$\cos\alpha = \cos 2.\frac{\alpha}{2}$

$\cos 2.\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$

$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ $\qquad /+ 2.\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha$

$2.\sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha$

využijeme základný vzťah medzi sínusom a kosínusom: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$2.\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha \qquad /:2$$
$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \qquad /\sqrt{}$$
$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

podobne začneme aj druhý dôkaz

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad /+\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}$$
$$\cos\alpha + \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} = 2.\cos^2\frac{\alpha}{2}$$
$$\cos\alpha + 1 = 2.\cos^2\frac{\alpha}{2} \qquad /:2$$
$$\frac{\cos\alpha+1}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2} \qquad /\sqrt{}$$
$$\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$$

dôkaz tretieho a štvrtého vzorca využije vzťah, že tangens aj kotangens môžeme vyjadriť ako podiel sínusu a kosínusu

$$\left|\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right| = \left|\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right| = \left|\frac{\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}\right| = \left|\sqrt{\frac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}\right| = \left|\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}.\frac{2}{1+\cos\alpha}}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$\left|\mathrm{cotg}\frac{\alpha}{2}\right| = \left|\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right| = \left|\frac{\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}\right| = \left|\sqrt{\frac{\frac{1+\cos\alpha}{2}}{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}\right| = \left|\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}.\frac{2}{1-\cos\alpha}}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

V. (súčet a rozdiel goniometrických funkcií)

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Dô.

prvý vzťah – súčet sínusových hodnôt
sčítajme prvé dva súčtové vzorce

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$$
$$\underline{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta}$$
$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta + \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2.\sin\alpha.\cos\beta$$

zaveďme substitúciu:

$$x = \alpha + \beta$$
$$y = \alpha - \beta$$

rovnica prejde do tvaru

$$\sin x + \sin y = 2.\sin\alpha.\cos\beta$$

vyjadrime zo sústavy uhly α a β – sčítajme substitúcie

$$x + y = 2\alpha \qquad /:2$$
$$\frac{x+y}{2} = \alpha$$

teraz odčítajme substitúcie

$$x - y = 2\beta \qquad /:2$$
$$\frac{x-y}{2} = \beta$$

dosaďme do rovnice

$$\sin x + \sin y = 2.\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$$

druhý vzťah – rozdiel sínusových hodnôt
odčítajme prvé dva súčtové vzorce → druhú rovnicu sme vynásobili s -1 a takto sčítame rovnice

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$
$\underline{-\sin(\alpha-\beta) = -\sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta}$
$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta - \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$
$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2.\cos\alpha.\cos\beta$

substitúcia je rovnaká

$\sin x - \sin y = 2.\cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$

tretí vzťah – súčet kosínusových hodnôt

sčítajme tretí a štvrtý súčtový vzorec

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$
$\underline{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta}$
$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta + \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2.\cos\alpha.\cos\beta$

po substitúcií dostaneme

$\cos x + \cos y = 2.\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$

štvrtý vzťah – rozdiel kosínusových hodnôt

odčítajme od tretieho súčtového vzorca štvrtý → štvrtú rovnicu násobíme s -1 a takto sčítame rovnice

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$
$\underline{-\cos(\alpha-\beta) = -\cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta}$
$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta - \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2.\sin\alpha.\sin\beta$

po substitúcií dostaneme

$\cos x - \cos y = -2.\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$

príklad:

Vypočítajte sin 15° bez použitia kalkulačky

použime súčtový vzorec – 15° vyjadríme ako rozdiel dvoch uhlov z tabuľky

buď ako 45° – 30°, alebo ako 60° – 45°

$\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45°.\cos 30° - \cos 45°.\sin 30° =$

teraz z tabuľky dosadíme hodnoty

$= \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

ak využijeme vlastnosti doplnkových uhlov, môžeme písať:

$\sin 15° = \cos 75° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Vypočítajte sin 15° bez použitia kalkulačky

to nie je vtip, ale teraz využime goniometrické funkcie polovičného uhla

$$\sin 15° = \sin\frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$\sin 15° = \cos 75° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

to znamená, že tie dve hodnoty sa rovnajú, hoci majú iný tvar – dokážme to

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \stackrel{?}{=} \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \qquad /.4$$
$$\sqrt{6}-\sqrt{2} \stackrel{?}{=} 2.\sqrt{2-\sqrt{3}} \qquad /()^2$$
$$\sqrt{6}^2 - 2.\sqrt{6}.\sqrt{2} + \sqrt{2}^2 \stackrel{?}{=} 2^2.\sqrt{2-\sqrt{3}}^2$$
$$6 - 2.\sqrt{12} + 2 \stackrel{?}{=} 4.(2-\sqrt{3})$$
$$8 - 2.\sqrt{4.3} \stackrel{?}{=} 8 - 4.\sqrt{3}$$
$$8 - 2.2.\sqrt{3} = 8 - 4.\sqrt{3}$$

Vypočítajte cos 15° bez použitia kalkulačky počítame najprv znovu súčtovým vzorcom

$\cos 15° = \cos(60° - 45°) = \cos 60°.\cos 45° + \sin 60°.\sin 45° =$

teraz z tabuľky dosadíme hodnoty

$= \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$\cos 15° = \sin 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

druhýkrát s polovičným uhlom rátame

$$\cos 15° = \cos\frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$\cos 15° = \sin 75° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

Vypočítajte tg 15° bez použitia kalkulačky

skúsme súčtovým vzorcom

$$\mathrm{tg}\, 15° = \mathrm{tg}(45° - 30°) = \frac{\mathrm{tg}\, 45° - \mathrm{tg}\, 30°}{1+\mathrm{tg}\, 45°.\mathrm{tg}\, 30°} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1.\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{\frac{3+\sqrt{3}}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}.\frac{3}{3+\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} =$$

usmerníme zlomok

$$= \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}.\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{(3-\sqrt{3})^2}{3^2-\sqrt{3}^2} = \frac{3^2-2.3.\sqrt{3}+\sqrt{3}^2}{9-3} = \frac{9-6.\sqrt{3}+3}{6} = \frac{12-6.\sqrt{3}}{6} = \frac{6(2-\sqrt{3})}{6} = 2-\sqrt{3}$$

$\mathrm{tg}\, 15° = \mathrm{cotg}\, 75° = 2-\sqrt{3}$

iný tvar dostaneme, ak umocníme a odmocníme hodnotu – vlastne absolútnu hodnotu dostaneme, ale pre 15°-ový uhol hodnota je kladná

$$\mathrm{tg}\, 15° = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = \sqrt{2^2 - 2.2.\sqrt{3} + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4-4.\sqrt{3}+3} = \sqrt{7-4.\sqrt{3}}$$

$\mathrm{tg}\, 15° = \mathrm{cotg}\, 75° = \sqrt{7-4.\sqrt{3}}$

Vypočítajte cotg 15° bez použitia kalkulačky

súčtovým vzorcom

$$\mathrm{cotg}\, 15° = \mathrm{cotg}(45° - 30°) = \frac{\mathrm{cotg}\, 45°.\mathrm{cotg}\, 30°+1}{\mathrm{cotg}\, 30° - \mathrm{cotg}\, 45°} = \frac{1.\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} =$$

usmerníme zlomok

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}.\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{\sqrt{3}^2-1^1} = \frac{\sqrt{3}^2+2.\sqrt{3}.1+1^2}{3-1} = \frac{3+2.\sqrt{3}+1}{2} = \frac{4+2.\sqrt{3}}{2} = \frac{2(2+\sqrt{3})}{2} = 2+\sqrt{3}$$

$\mathrm{cotg}\, 15° = \mathrm{tg}\, 75° = 2+\sqrt{3}$

umocníme a odmocníme aj túto hodnotu

$$\mathrm{cotg}\, 15° = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} = \sqrt{2^2 + 2.2.\sqrt{3} + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4+4.\sqrt{3}+3} = \sqrt{7+4.\sqrt{3}}$$

$\mathrm{cotg}\, 15° = \mathrm{tg}\, 75° = \sqrt{7+4.\sqrt{3}}$

Zjednodušte: $\sin(30° + x) + \cos(30° - x)$

$\sin(30° + x) + \cos(30° - x) = \sin 30°.\cos x + \cos 30°.\sin x + \cos 30°.\cos x + \sin 30°.\sin x =$

$= \frac{1}{2}.\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}.\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}.\cos x + \frac{1}{2}.\sin x = \cos x.\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sin x.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.(\cos x + \sin x)$

Zjednodušte: $\sin(x - 45°).\cos(x + 45°)$

$\sin(x - 45°).\cos(x + 45°) = (\sin x.\cos 45° - \cos x.\sin 45°)(\cos x.\cos 45° - \sin x.\sin 45°) =$

$= \left(\sin x.\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos x.\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x.\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-\cos x + \sin x) =$

$= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(\sin x - \cos x)^2 = -\frac{2}{4}(\sin^2 x - 2.\sin x.\cos x + \cos^2 x) = -\frac{1}{2}(1 - 2.\sin x.\cos x) =$

$= -\frac{1}{2}(1 - \sin 2x)$

Upravte výraz: cos 4x

$\cos 4x = \cos 2.2x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 - (2.\sin x.\cos x)^2 =$
$= \cos^4 x - 2.\cos^2 x.\sin^2 x + \sin^4 x - 4.\sin^2 x.\cos^2 x = \cos^4 x - 6.\cos^2 x.\sin^2 x + \sin^4 x =$
$= \cos^4 x - 6.\cos^2 x.(1 - \cos^2 x) + \sin^4 x = \cos^4 x - 6.\cos^2 x + 6.\cos^4 x + \sin^4 x =$
$= 7.\cos^4 x - 6.\cos^2 x + (\sin^2 x)^2 = 7.\cos^4 x - 6.\cos^2 x + (1 - \cos^2 x)^2 =$
$= 7.\cos^4 x - 6.\cos^2 x + 1 - 2.1.\cos^2 x + \cos^4 x = 8.\cos^4 x - 8.\cos^2 x + 1$

Vypočítajte výraz bez použitia tabuliek: sin 105° + sin 75°

$\sin 105° + \sin 75° = 2.\sin \frac{105°+75°}{2}.\cos \frac{105°-75°}{2} = 2.\sin 90°.\cos 15° = 2.1.\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

Vypočítajte výraz bez použitia tabuliek: cos 225° – cos 75°

$\cos 225° - \cos 75° = -2.\sin \frac{225°+75°}{2}.\sin \frac{225°-75°}{2} = -2.\sin 150°.\sin 75° = -2.\sin 30°.\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} =$
$= -2.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$