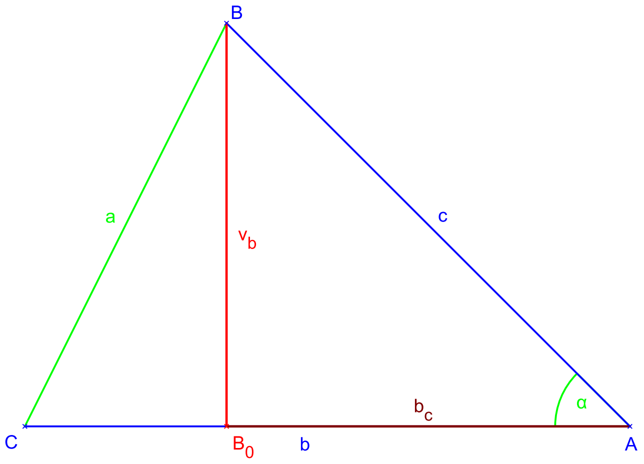
Kosínusová veta

Dokreslime do všeobecného trojuholníka jednu výšku (v_b) a vo vzniknutých pravouhlých trojuholníkoch (BCB_0 a ABB_0) využime Pytagorovu vetu. Nakoľko výšku chceme eliminovať (odstrániť), tak ju vyjadríme z obidvoch rovníc.



$a^2 = v_b^2 + (b - b_c)^2 \quad \rightarrow \quad a^2 - (b - b_c)^2 = v_b^2$

$c^2 = v_b^2 + b_c^2 \quad \rightarrow \quad c^2 - b_c^2 = v_b^2$

teraz môžeme písať rovnosť ľavých strán

$a^2 - (b - b_c)^2 = c^2 - b_c^2$

odstránime zátvorku a potom vyjadríme a^2

$a^2 - (b^2 - 2.b.b_c + b_c^2) = c^2 - b_c^2$

$a^2 - b^2 + 2bb_c - b_c^2 = c^2 - b_c^2$

$a^2 = c^2 + b^2 - 2bb_c$

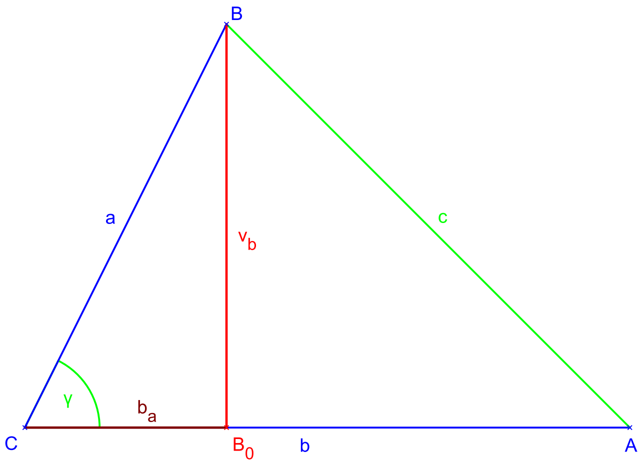
ešte b_c potrebujeme odstrániť zo vzťahu → preto v trojuholníku ABB_0 využijeme aj goniometrickú funkciu kosínus

$\cos \alpha = \frac{b_c}{c} \quad \rightarrow \quad c.\cos \alpha = b_c$

dosadením a preusporiadaním dostaneme konečný tvar kosínusovej vety

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos \alpha$

Ak pri takom istom delení trojuholníka pomocou výšky v_b v opačných trojuholníkoch urobíme tie isté kroky, dostaneme kosínusovú vetu pre inú stranu – stranu c.



$a^2 = v_b^2 + b_a^2 \quad \rightarrow \quad a^2 - b_a^2 = v_b^2$

$c^2 = v_b^2 + (b - b_a)^2 \quad \rightarrow \quad c^2 - (b - b_a)^2 = v_b^2$

$a^2 - b_a^2 = c^2 - (b - b_a)^2$

$a^2 - b_a^2 = c^2 - (b^2 - 2.b.b_a + b_a^2)$

$a^2 - b_a^2 = c^2 - b^2 + 2bb_a - b_a^2$

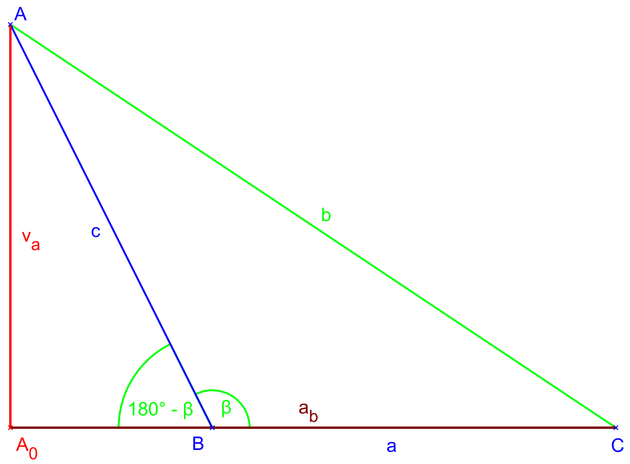
$a^2 + b^2 - 2bb_a = c^2$

$\cos \gamma = \frac{b_a}{a} \quad \rightarrow \quad a.\cos \gamma = b_a$

dosadením a preusporiadaním dostaneme konečný tvar kosínusovej vety

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma$

Kosínusovú vetu pre tretiu stranu dostaneme dokreslením druhej výšky (v_a alebo v_c). Ale skúsme to dokázať v tupouhlom trojuholníku, kde tá výška ide mimo trojuholníka. Aj v takomto prípade platí?



$b^2 = v_a^2 + a_b^2 \quad \rightarrow \quad b^2 - a_b^2 = v_a^2$

$c^2 = v_a^2 + (a_b - a)^2 \quad \rightarrow \quad c^2 - (a_b - a)^2 = v_a^2$

$b^2 - a_b^2 = c^2 - (a_b - a)^2$

$b^2 - a_b^2 = c^2 - (a_b^2 - 2.a_b.a + a^2)$

$b^2 - a_b^2 = c^2 - a_b^2 + 2a_ba - a^2$

$b^2 = c^2 - a^2 + 2a_ba$

$\cos(180° - \beta) = \frac{a_b - a}{c} \quad \rightarrow \quad c.\cos(180° - \beta) = a_b - a$

využime vzťah: $\cos(180° - x) = -\cos x$

$c.(-\cos\beta) = a_b - a \quad \rightarrow \quad a - c.\cos\beta = a_b$

$b^2 = c^2 - a^2 + 2(a - c.\cos\beta)a = c^2 - a^2 + 2a^2 - 2ac.\cos\beta = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\beta$

V. Obsah štvorca nad stranou sa rovná súčtu obsahov štvorcov nad ďalšími stranami trojuholníka (druhou a treťou) zmenšeného o dvojnásobok obsahu obdĺžnika zostrojeného z ďalších strán tak, že jednou stranou je druhá strana trojuholníka a druhou je pravouhlý priemet tretej strany na priamke obsahujúcej druhú stranu.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma$

P. Túto vetu využijeme aj vtedy, ak z troch známych strán počítame prvý vnútorný uhol všeobecného trojuholníka. Ďalší uhol už zvykneme počítať sínusovou vetou – jednoduchší výpočet. Upravme vety a vyjadrime z nich uhol – vlastne kosínus vnútorných uhlov.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha \qquad / - b^2 - c^2$

$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc.\cos\alpha \qquad /:(-2bc)$

$\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} = \cos\alpha$

$\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

Analogicky dostaneme aj pre ďalšie uhly.

V.

$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

príklad:

Riešte trojuholník ABC, ak je dané: $a = 60$; $b = 42$; $\alpha = 44°25'$

máme dvojicu protiľahlých údajov ⇒ sínusovou vetou riešime

najprv uhol β počítame, preto prevrátený tvar sínusovej vety použime

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a}$$

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{a} . b = \frac{\sin 44°25'}{60} . 42 = 0{,}489\,9 \;\rightarrow\; \beta = \sin^{-1} 0{,}489\,9$$

β = 29°20'5"

γ = 180° – (α + β) = 180° – 73°45'5"

γ = 106°14'55"

na výpočet poslednej strany znovu použime sínusovú vetu

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

$$c = \frac{a}{\sin\alpha} . \sin\gamma = \frac{60}{\sin 44°25'} . \sin 106°14'55''$$

c = 82,306

P. Použite tie dvojice zlomkov, kde je čím viac daných údajov a čo najmenej počítaných!

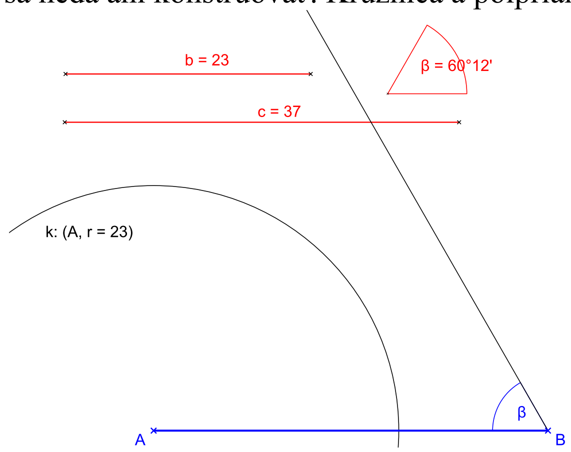
Tretiu stranu by sme mohli počítať aj zo vzťahu: $\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta}$. Lenže tu by sme mali dve počítané, zaokrúhlené údaje – uhly β a γ. V použitom vzťahu jedine uhol γ je počítaný a ostatné boli dané.

Riešte trojuholník ABC, ak je dané: b = 23; c = 37; β = 60°12'

$$\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\beta}{b}$$

$$\sin\gamma = \frac{\sin\beta}{b} . c = \frac{\sin 60°12'}{23} . 37 = 1{,}396\,0 \;\rightarrow$$ nemá riešenie – sínusové hodnoty sú z intervalu ⟨-1; 1⟩

P. Trojuholník s takými údajmi sa nedá ani konštruovať. Kružnica a polpriamka nemajú spoločný bod.



Riešte trojuholník ABC, ak je dané: c = 100; α = 64°; β = 42°

najprv vypočítame tretí uhol a potom sínusovou vetou pokračujeme

γ = 180° – (α + β) = 180° – 106°

γ = 74°

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$a = \frac{c}{\sin\gamma} . \sin\alpha = \frac{100}{\sin 74°} . \sin 64°$$

a = 93,501

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$b = \frac{c}{\sin\gamma} . \sin\beta = \frac{100}{\sin 74°} . \sin 42°$$

b = 69,610

Riešte trojuholník ABC, ak je dané: a = 13; b = 7; γ = 36°

dané sú dve strany a nimi zovretý uhol ⇒ kosínusovou vetou vypočítame chýbajúcu stranu

$c^2 = a^2 + b^2 – 2ab.\cos\gamma = 13^2 + 7^2 – 2.13.7.\cos 36° = 169 + 49 – 182.0{,}809\,0 = 218 – 147{,}241 = 70{,}759$

P. Jedinú chybu, čo môže voľakto urobiť v tomto kroku, je zlúčenie tretej hodnoty pred vynásobením s kosínusovou hodnotou: 169 + 49 – 182.0,809 0 ≠ 36.0,809 0 = 29,125

$c = 8{,}412$

ďalší uhol už sínusovou vetou počítame

$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}$

$\sin\alpha = \frac{\sin\gamma}{c} . a = \frac{\sin 36°}{8{,}412} . 13 = 0{,}908\,4 \;\rightarrow\; \alpha = \sin^{-1} 0{,}908\,4$

$\alpha = 65°17'1''$

tretí už iba zvyšok do 180°

$\beta = 180° - (\alpha + \gamma) = 180° - 101°17'1''$

$\beta = 78°42'59''$

P. Ten, kto pri výsledkoch matematických príkladov ani trošku neuvažuje nad tým, či môže byť tá hodnota/tie hodnoty riešením príkladu alebo nie a automaticky podčiarkne vypočítanú hodnotu, žiaľ tu urobí chybu – z troch výsledkov jedine strana c je správne vypočítaná.

Je taká matematická veta, ktorá hovorí, že ***v trojuholníku oproti dlhšej strany je väčší vnútorný uhol***. No a pozrime sa na náš príklad: strana a má dĺžku 13 – uhol $\alpha = 65°17'1''$; zase strana b je 7 – uhol $\beta = 78°42'59''$. Takže tieto vnútorné uhly nie sú správne vypočítané.

Kde a prečo sa stala chyba? Prečo sme dostali zlý uhol? A hlavne ako sa vyhýbať takejto chyby?

Funkcia sínus „môže za to". Funkcia nadobúda kladné hodnoty aj pre ostré: interval (0; 90°) aj pre tupé uhly: interval (90°; 180°). A kalkulačka zo sínusových hodnôt vždy vráti uhol najbližší k nule. Čiže aj keď je to tupouhlý trojuholník, kalkulačkou vždy sa stane z neho ostrouhlý, ak sínusovou vetou počítame práve ten tupý uhol.

Ako môžeme to obísť? Jednoducho máme počítať uhol ktorý nemôže byť tupý. Nakoľko v jednom trojuholníku môže byť iba jeden tupý uhol (ak viac, potom by súčet presiahol 180°), **sínusovou vetou treba počítať uhol oproti kratšej strany!**

prepočítajme znovu

$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$

$\sin\beta = \frac{\sin\gamma}{c} . b = \frac{\sin 36°}{8{,}412} . 7 = 0{,}489\,1 \;\rightarrow\; \beta = \sin^{-1} 0{,}489$

$\beta = 29°17'1''$

$\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - 65°17'1''$

$\alpha = 114°42'59''$

a tieto hodnoty sú už tie správne

V trojuholníku ABC sú dané dĺžky jeho strán: $a = 20$; $b = 40$; $c = 28$. Vypočítajte veľkosti jeho vnútorných uhlov.

P. Ak nechceme urobiť podobnú chybu, ako v predchádzajúcom príklade, tak **prvý uhol** s kosínusovou vetou máme počítať **ten najväčší**. Totiž kosínusové hodnoty tupých uhlov sú záporné. Ak náhodou trojuholník je tupouhlý, tak to hneď zistíme, ak počítame **uhol oproti najdlhšej strany** – v našom príklade je to uhol β.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\beta$$
$$40^2 = 20^2 + 28^2 - 2.20.28.\cos\beta$$
$$1\,600 = 400 + 784 - 1\,120.\cos\beta$$
$$1\,600 = 1\,184 - 1\,120.\cos\beta \qquad /-1\,184$$
$$416 = -1\,120.\cos\beta \qquad /:(1\,120)$$
$$-0{,}371\,4 = \cos\beta$$
$$\beta = \cos^{-1}(-0{,}371\,4)$$
$$\beta = 111°48'13''$$

teraz už je jedno, ktorým uhlom pokračujeme sínusovou vetou

$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$

$\sin\alpha = \frac{\sin\beta}{b} . a = \frac{\sin 111°48'13''}{40} . 20 = 0{,}464\,2 \;\rightarrow\; \alpha = \sin^{-1} 0{,}464\,2$

$\alpha = 27°39'38''$

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 139°27'51''$

$\gamma = 40°32'9''$