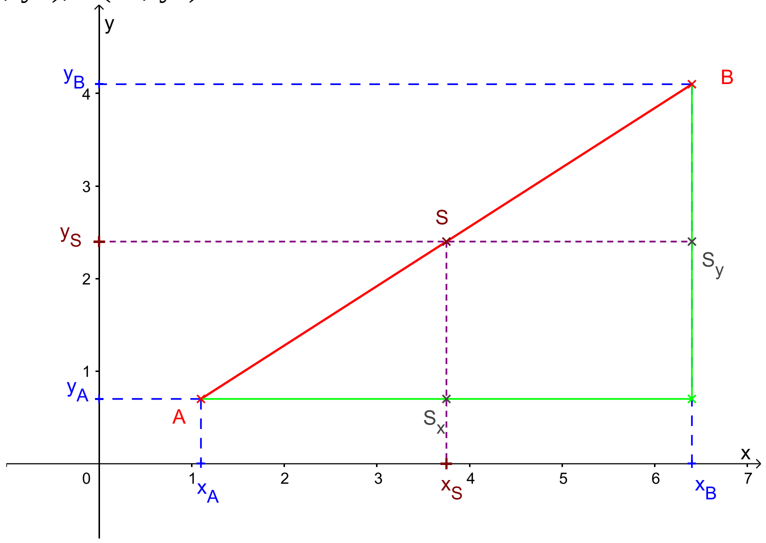
Stred úsečky

Euklidovské konštrukcie – konštrukcie pomocou pravítka (rovné pravítko) a kružidla
- spojiť dva rôzne body jednou priamkou
- zobrať do kružidla vzdialenosť dvoch bodov
- nakresliť kružnicu okolo daného bodu s daným polomerom (aby prechádzala iným bodom alebo mala polomer ako veľkosť známej úsečky)
- vyznačiť priesečník priamok (ak existuje)
- vyznačiť priesečník priamky a kružnice (jeden alebo obidva – ak existuje/ú)
- vyznačiť priesečník dvoch kružníc (jeden alebo obidva – ak existuje/ú)

pomocou predchádzajúcich postupov vieme zostrojiť nasledujúce objekty
- stred úsečky
- os uhla
- kolmicu na priamku v danom bode (os priameho uhla) → v strede úsečky je vlastne os úsečky
- viesť s danou priamkou rovnobežnú priamku v danom bode
- preniesť daný uhol

V analytickej geometrii takisto sa dajú opísať tieto objekty. Väčšinou sú to rovnice týchto útvarov, ale výnimkou je napríklad stred úsečky, čo je vlastne iba jeden bod. Skúsme jeho súradnice určiť, ak poznáme súradnice krajných bodov.

Dané sú body A a B: $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$



- na obrázku vidíme dva menšie trojuholníky SAS_x a BSS_y
- tie trojuholníky sú podobné, lebo ich strany sú rovnobežné ($\triangle SAS_x \sim \triangle BSS_y$)
- ale bod S je stredom úsečky AB ⇒ podobné trojuholníky sa zhodujú v jednej strane ($|AS| = |SB|$)
- preto tieto trojuholníky SAS_x a BSS_y nie iba podobné sú, ale aj zhodné ($\triangle SAS_x \cong \triangle BSS_y$)
- ale z toho vyplýva, že sa zhodujú aj v ďalších dvoch stranách: $|AS_x| = |SS_y|$ a $|S_xS| = |S_yB|$
- to znamená, že na súradnicových osiach súradnice x_S a y_S sú presne v strede medzi súradnicami krajných bodoch:

  x_S v strede x_A a x_B

  y_S v strede y_A a y_B

Ak hľadáme číslo, ktoré stojí presne v strede medzi danými číslami, najjednoduchší spôsob na jeho výpočet je aritmetický priemer čísel:

čísla 7,2 a 15,7: $\bar{x}_A = \frac{7{,}2+15{,}7}{2} = \frac{22{,}9}{2} = 11{,}45$

skontrolujme vzdialenosti (rozdiely) medzi číslami:

$11{,}45 - 7{,}2 = 4{,}25$

$15{,}7 - 11{,}45 = 4{,}25$

Čo z toho vyplýva? Že jednotlivé súradnice stredu úsečky dostanem, ak vypočítam aritmetický priemer súradníc. Z x-ových x-ovú z y-ových y-ovú súradnicu.

V. $x_S = \frac{x_A+x_B}{2}$

$y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$

$S = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

Tento vzorec nie iba na výpočet stredu úsečky sa využíva. Ak ho upravíme, môžeme aj krajný bod vypočítať z druhého krajného bodu a stredu úsečky.

$S = \frac{A+B}{2}$ /.2

$2.S = A + B$ /-A

$2.S - A = B$

Samozrejme podľa tohto vzťahu zvlášť počítame x-ovú súradnicu krajného bodu z x-ových súradníc, y-ovú z y-ových.

$B = (2.x_S - x_A; 2.y_S - y_A)$

$A = (2.x_S - x_B; 2.y_S - y_B)$

P. V priestore samozrejme rozšírime o tretiu súradnicu:

$S = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

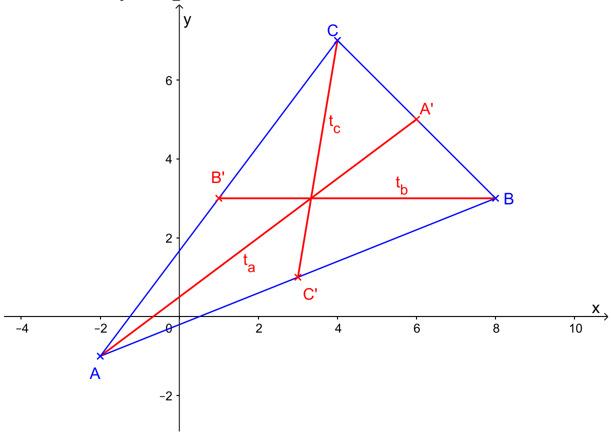
$B = (2.x_S - x_A; 2.y_S - y_A; 2.z_S - z_A)$

$A = (2.x_S - x_B; 2.y_S - y_B; 2.z_S - z_B)$

príklad:

Vypočítajte dĺžky ťažníc trojuholníka: A(-2; -1); B(8; 3); C(4; 7).

najprv vypočítame stred strany, a potom určíme dĺžku ako vzdialenosť bodov



$A' = \frac{B+C}{2} = \left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2}\right) = \left(\frac{8+4}{2}; \frac{3+7}{2}\right) = (6; 5)$

$t_a = |AA'| = \sqrt{(x_{A'} - x_A)^2 + (y_{A'} - y_A)^2} = \sqrt{\left(6 - (-2)\right)^2 + \left(5 - (-1)\right)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36}$

$t_a = 10$

$B' = \frac{A+C}{2} = \left(\frac{-2+4}{2}; \frac{-1+7}{2}\right) = (1; 3)$

$t_b = |BB'| = \sqrt{(1-8)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{(-7)^2 + 0^2} = \sqrt{49 + 0}$

$t_b = 7$

$C' = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{-2+8}{2}; \frac{-1+3}{2}\right) = (3; 1)$

$t_c = |CC'| = \sqrt{(3-4)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-6)^2} = \sqrt{1 + 36} = \sqrt{37}$

$t_c = 6{,}083$

Úsečka KL má krajný bod K(13; -3) a stred S(-5; 7). Určte jej druhý krajný bod.

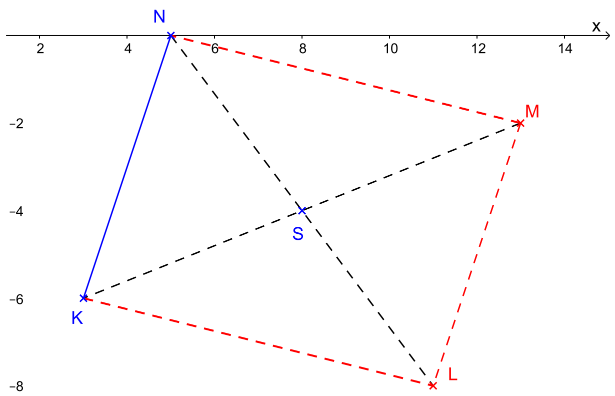
$S = \frac{K+L}{2} \rightarrow L = 2.S - K$

$L = (2.(-5) - 13; 2.7 - (-3)) = (-10 - 13; 14 + 3)$

$L = (-23; 17)$

V rovnobežníku KLMN sú dané vrcholy K(3; -6), N(5; 0), a priesečník uhlopriečok S(8; -4). Určte zvyšné vrcholy L, M a veľkosť uhlopriečok.

využijeme, že stred rovnobežníka je stredom aj uhlopriečok



$S = \frac{L+N}{2} \longrightarrow L = 2.S - N$

L = (2.8 – 5; 2.(-4) – 0) = (16 – 5; -8 – 0)

L = (11; -8)

$S = \frac{K+M}{2} \longrightarrow M = 2.S - K$

M = (2.8 – 3; 2.(-4) – (-6)) = (16 – 3; -8 + 6)

M = (13; -2)

$e = |KM| = \sqrt{(x_M - x_K)^2 + (y_M - y_K)^2} = \sqrt{(13-3)^2 + \left(-2-(-6)\right)^2} = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{100+16}$

e = 10,770

$f = |LN| = \sqrt{(5-11)^2 + \left(0-(-8)\right)^2} = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{36+64}$

f = 10