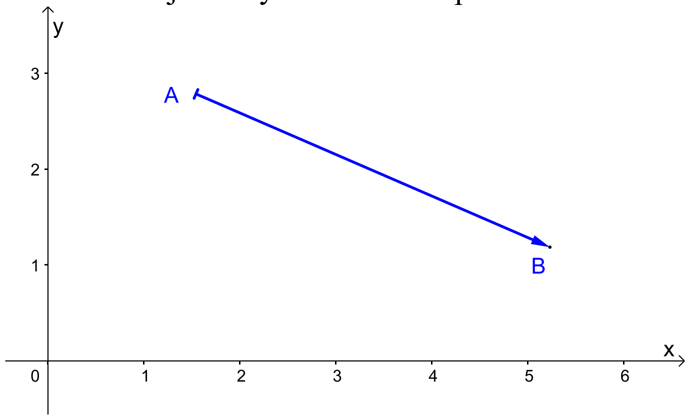
Vektory

orientovaná úsečka – dva body v danom poradí, pričom prvý bod sa volá začiatočný (počiatočný) bod a druhý koncový bod

P. V zápise na prvom mieste je vždy začiatočný a na druhom mieste koncový bod a nad to ide šípka.

$\overrightarrow{AB}$ – iné značenie orientovanej úsečky: $\overline{AB}$; $\underline{AB}$; *AB*; **AB** (čiarka nad; podčiarknutie; kurzíva; tučné)

Graficky ku koncovému bodu orientovanej úsečky dokreslíme šípku.



nulová orientovaná úsečka – začiatočný a koncový bod orientovanej úsečky sú totožné

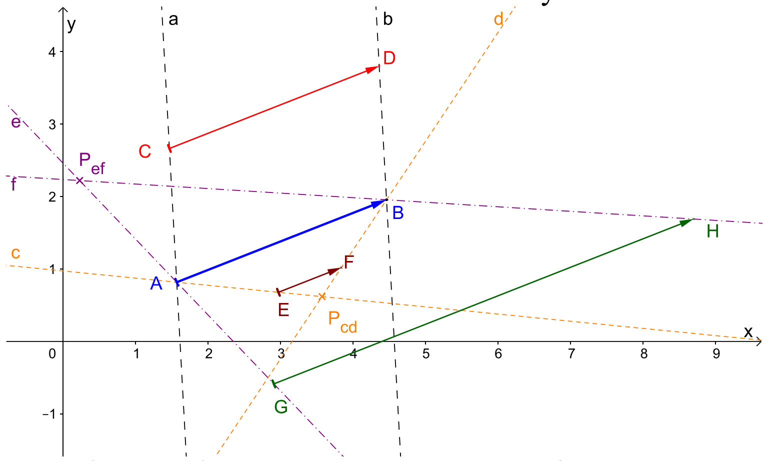
veľkosť orientovanej úsečky – vzdialenosť začiatočného a koncového bodu (totožná s veľkosťou „obyčajnej" úsečky)

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = |AB|$

P. Veľkosť nulovej orientovanej úsečky je nula.

$\left|\overrightarrow{AA}\right| = |AA| = 0$

orientované úsečky majú rovnaký smer (iba pri rovnobežných má zmysel) – ak spojnica začiatočných a spojnica koncových bodov orientovaných úsečiek buď sú rovnobežné (orientované úsečky rovnakej veľkosti), alebo ich priesečník neleží medzi priamkami ktoré určia tie orientované úsečky

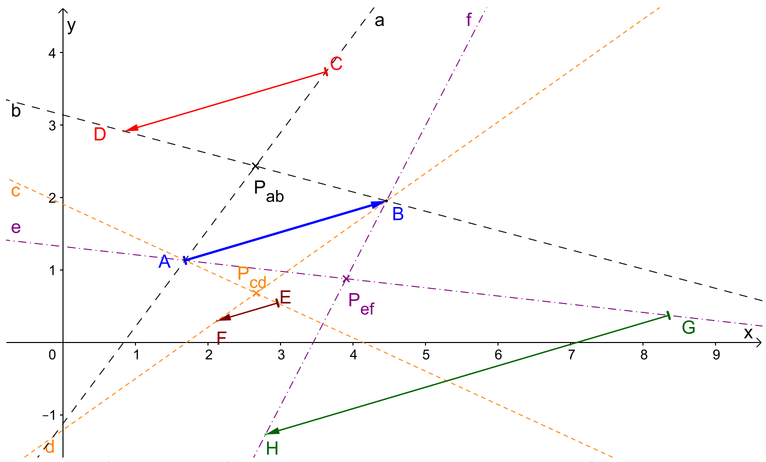


Všetky tri orientované úsečky $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{GH}$ majú rovnaký smer ako $\overrightarrow{AB}$.

Orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ sú rovnakej veľkosti. Spojnica začiatočných bodov A a C (priamka a) a spojnica koncových bodov B a D (priamka b) sú rovnobežné.

Z orientovaných úsečiek $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{EF}$ tá druhá je kratšia. Spojnica začiatočných bodov A a E (priamka c) a spojnica koncových bodov B a F (priamka d) má priesečník (P_{cd}) za kratšou orientovanou úsečkou (v polrovine, určenou dlhšou orientovanou úsečkou, obsahujúcej kratšiu orientovanú úsečku).

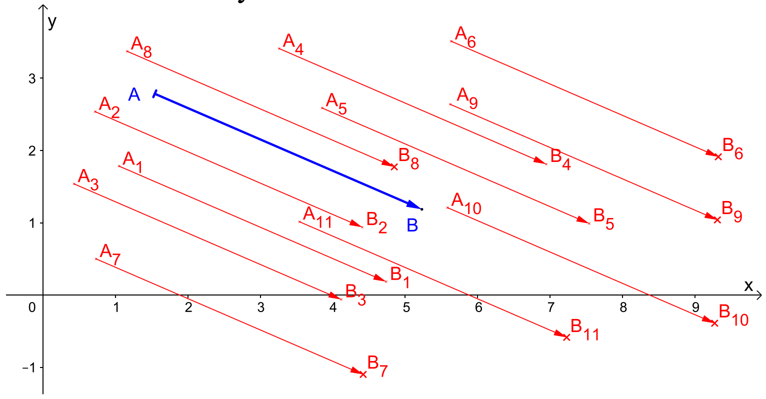
Z orientovaných úsečiek $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{GH}$ tá druhá je dlhšia. Spojnica začiatočných bodov A a G (priamka e) a spojnica koncových bodov B a H (priamka f) má priesečník (P_{ef}) za kratšou orientovanou úsečkou.



Všetky tri orientované úsečky $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{GH}$ majú opačný smer ako $\overrightarrow{AB}$. Spojnice začiatočných bodov (bod A s bodmi C, E a G – čiže priamky a, c a e) a spojnice koncových bodov (bod B s bodmi D, F a H – čiže priamky b, d a f) majú priesečníky vždy medzi dvojicami orientovaných úsečiek: P_{ab} medzi $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$; P_{cd} medzi $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{EF}$; P_{ef} medzi $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{GH}$.

Teraz si predstavme, že posunieme jednu orientovanú úsečku (začiatočný bod – a tým celú úsečku) do každého bodu nášho pracovného priestoru – roviny (môžeme to rozšíriť aj na všetky body priestoru). Dostaneme jednu nekonečnú množinu orientovaných úsečiek. Takáto jedna množina je jeden vektor.

D. *Vektor* je nekonečná množina orientovaných úsečiek, v ktorej všetky orientované úsečky sú navzájom rovnobežné, majú rovnakú veľkosť a rovnaký smer.

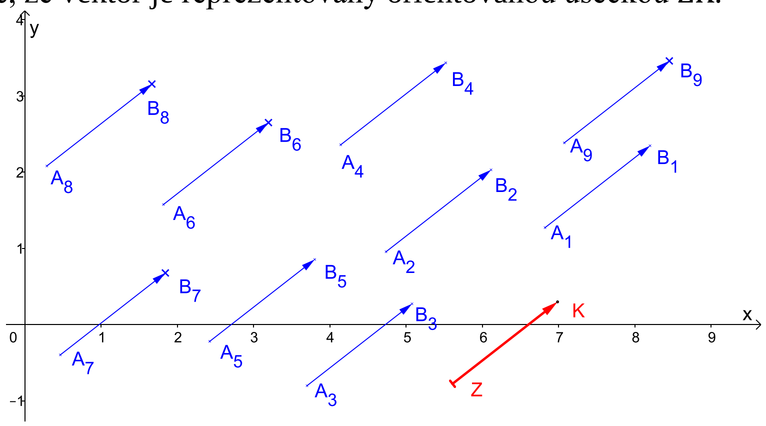


Na označenie vektorov používame malé písané písmená so šípkou nad (alebo alternatívne značenie, ako pri orientovaných úsečkách): $\vec{a}$ ($\bar{a}$; $\underline{a}$; *a*; **a**)

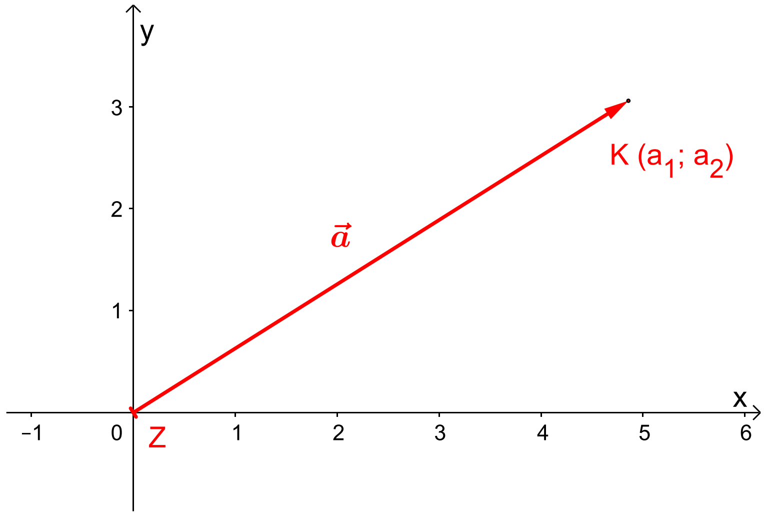
vektor daný orientovanou úsečkou: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$

P. Vektory môžeme považovať aj za zhodné zobrazenia, konkrétne za posúvanie. Vektor je také posúvanie, ktoré prenesie začiatočný bod orientovanej úsečky do koncového bodu. Ak k nejakému danému bodu „pripočítame" vektor, dostaneme koncový bod orientovanej úsečky vektora umiestneného do daného bodu.

Ak si vyberieme jednu orientovanú úsečku z tej nekonečnej množiny, dostaneme jedno umiestnenie daného vektora (konkrétne: ***umiestnenie vektora do bodu*** Z – kde bod Z je začiatočným bodom vybratej orientovanej úsečky). Takisto hovoríme, že vektor je reprezentovaný orientovanou úsečkou $\overrightarrow{ZK}$.



základné umiestnenie vektora – umiestnenie, kde začiatočným bodom orientovanej úsečky je začiatok súradnicovej sústavy O(0; 0)



súradnice vektora – súradnice koncového bodu v základnom umiestnení

$\vec{a} = \overrightarrow{ZK} = (a_1; a_2)$

P. V priestore: $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$

Samozrejme bolo by nevýhodné, keby sme súradnice vektorov určili práve tým spôsobom. Väčšinou vektory sú dané orientovanou úsečkou tak, že poznáme súradnice začiatočného a koncového bodu.

V. Súradnice vektora dostaneme, ak zo súradníc koncového bodu odčítame súradnice začiatočného bodu („koncový bod mínus začiatočný“).

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$; $A = (x_A; y_A)$; $B = (x_B; y_B)$

$\vec{a} = B - A = (x_B; y_B) - (x_A; y_A)$

$\vec{a} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

P. V priestore: $\vec{a} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

P. Podobne ako pri výpočte súradníc stredu úsečky (mohli sme aj krajný bod počítať upravením vzorca), aj pomocou tohto vzorca môžeme určiť súradnice začiatočného alebo koncového bodu orientovanej úsečky.

$\vec{a} = B - A \qquad /+A$

$\vec{a} + A = B$

$\vec{a} = B - A \qquad /+A - \vec{a}$

$A = B - \vec{a}$

Samozrejme podľa týchto vzťahov zvlášť počítame x-ovú súradnicu začiatočného alebo koncového bodu z x-ových súradníc, y-ovú z y-ových.

$A = (x_B - a_1; y_B - a_2)$

$B = (a_1 + x_A; a_2 + y_A)$

P. V priestore: $A = (x_B - a_1; y_B - a_2; z_B - a_3)$; $B = (a_1 + x_A; a_2 + y_A; a_3 + z_A)$

V. Dva vektory sa rovnajú, ak sa rovnajú ich nekonečné množiny orientovaných úsečiek (obsahujú tie isté prvky – orientované úsečky). Z toho vyplýva, že práve vtedy, ak majú jednotlivé súradnice rovnaké.

$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow (a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2)$

D. ***Polohový vektor bodu*** A je vektor daný orientovanou úsečkou $\overrightarrow{OA}$, kde bod O je začiatočným bodom súradnicovej sústavy.

V. Polohový vektor bodu A má rovnaké súradnice ako samotný bod.

$A = (x_A; y_A) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = (x_A; y_A)$

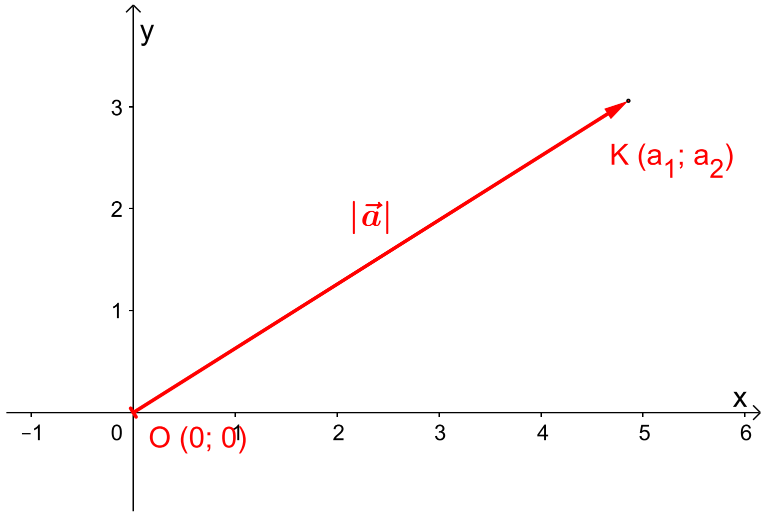
$A = (x_A; y_A; z_A) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = (x_A; y_A; z_A)$

P. Body súradnicovej sústavy môžeme nahradiť polohovými vektormi.

veľkosť vektora – je veľkosť hociktorého umiestnenia toho vektora (veľkosť orientovanej úsečky → vzdialenosť bodov)

Na označenie veľkosti vektora sa používa absolútna hodnota: $|\vec{a}|$

Skúsme určiť veľkosť vektora. Zoberme základné umiestnenie. Začiatočným bodom je začiatok súradnicovej sústavy O, čo má súradnice nuly. Koncový bod potom má presne tie súradnice, čo samotný vektor.



Teraz podľa vety na výpočet vzdialenosti bodov pokračujeme s výpočtom:

$$|\vec{a}| = |ZK| = \sqrt{(x_K - x_Z)^2 + (y_K - y_Z)^2} = \sqrt{(a_1 - 0)^2 + (a_2 - 0)^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Čiže, ak poznáme súradnice vektora, môžeme hneď určiť jeho veľkosť.

V. $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

P. V priestore: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

V. $|\vec{a}| \geq 0 \ \wedge \ |\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

$|\lambda\vec{a}| = |\lambda|.|\vec{a}|$

$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ trojuholníková nerovnosť

$\left||\vec{a}| - |\vec{b}|\right| \leq |\vec{a} - \vec{b}|$

opačný vektor – rovnobežný vektor s rovnakou veľkosťou ale opačným smerom (v množinách sú orientované úsečky s opačným smerom a rovnakou dĺžkou)

Podľa veľkosti dva špeciálne vektory poznáme (zvláštna veľkosť):

nulový vektor – má veľkosť nulu: množina obsahuje nulové orientované úsečky

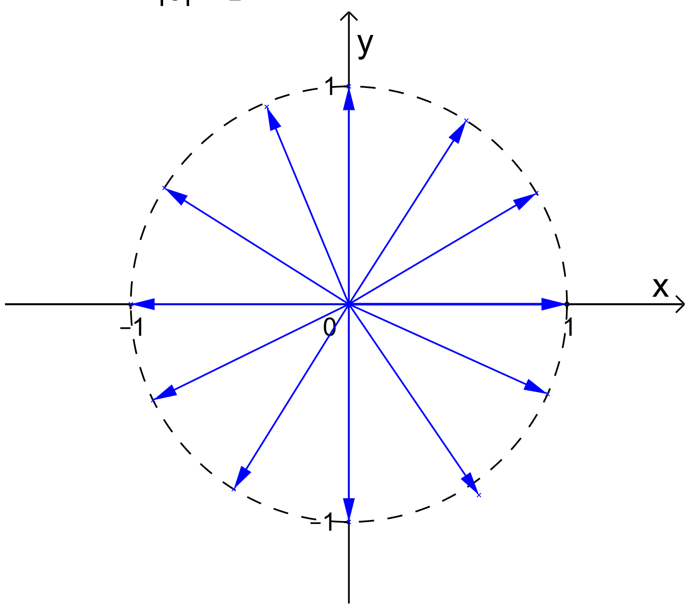
$\vec{0} = (0; 0)$ $|\vec{0}| = 0$

P. Nulový vektor nemá smer. Preto je rovnobežný s hocijakým iným vektorom, a takisto aj kolmý na hocijaký iný vektor.

Nemiešajte nulu ako číslo s nulovým vektorom. Tie nie že sa nerovnajú, ale ani sa nedajú porovnať (tak ako nemôžeme porovnať kvadratickú funkciu s trojuholníkom), alebo zlúčiť, nakoľko sú to dva rôzne matematické objekty. Nemôžeme jeden nahradiť druhým a použiť namiesto toho druhého.

jednotkový vektor – má veľkosť jedna: môže mať akýkoľvek smer

$\vec{e}$ alebo $\overrightarrow{a_0}$ $|\vec{e}| = 1$



P. Jednotkové vektory v smere kladných častí súradnicových ôs zvykneme označovať písmenami $\vec{i}$; $\vec{j}$ a $\vec{k}$.

príklad:

Daný je vektor $\vec{v}$ orientovanou úsečkou $\overrightarrow{KL}$. Poznáme body: K(12; 17); L(-5; 21). Určte jeho súradnice.

$\vec{v} = \overrightarrow{KL} = L - K = (-5 - 12; 21 - 17)$

$\vec{v} = (-17; -4)$

Daný je vektor $\vec{w}(8; -3)$ orientovanou úsečkou $\overrightarrow{MN}$. Poznáme body: M(-10; 5); N(x_N; y_N). Určte súradnice bodu N.

$\vec{w} = \overrightarrow{MN} = N - M = (x_N; y_N) - (-10; 5) = (x_N - (-10); y_N - 5) = (x_N + 10; y_N - 5)$

$(8; -3) = (x_N + 10; y_N - 5) \Leftrightarrow \begin{cases} 8 = x_N + 10 \\ -3 = y_N - 5 \end{cases}$

$x_N = -2; y_N = 2$

N(-2; 2)

Daný je trojuholník ABC vrcholmi: A(-2; -1); B(8; 3); C(4; 7). Určte súradnice vektorov určených nasledujúcimi orientovanými úsečkami:

a, $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ b, $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$ c, $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$

$\vec{c} = \overrightarrow{AB} = B - A = (8; 3) - (-2; -1) = (8 - (-2); 3 - (-1))$

$\vec{c} = (10; 4)$

$\vec{b} = \overrightarrow{CA} = A - C = (-2; -1) - (4; 7) = (-2 - 4; -1 - 7)$

$\vec{b} = (-6; -8)$

$\vec{a} = \overrightarrow{CB} = B - C = (8; 3) - (4; 7) = (8 - 4; 3 - 7)$

$\vec{a} = (4; -4)$

Ktorý z daných vektorov je najdlhší: $\vec{d} = (-3; 4)$; $\vec{e} = (2; -5)$; $\vec{f} = (6; 1)$; $\vec{g} = (-2; -6)$?

$|\vec{d}| = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$

$|\vec{e}| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29} = 5{,}385$

$|\vec{f}| = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{36 + 1} = \sqrt{37} = 6{,}083$

$|\vec{g}| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 6{,}325$

Určte chýbajúcu súradnicu vektora $\vec{h}(-35; h_2)$, ak $|\vec{h}| = 37$.

$|\vec{h}| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = \sqrt{(-35)^2 + h_2^2} = \sqrt{1\,225 + h_2^2}$

$37 = \sqrt{1\,225 + h_2^2}$ $/()^2$

$1\,369 = 1\,225 + h_2^2$ $/-1\,225$

$144 = h_2^2$ $/\sqrt{\ }$

$12 = |h_2|$

$h_2 = 12$ $h_2' = -12$