Vzájomná poloha priamok

Vzájomná poloha priamok v rovine môže byť trojaká: totožné, rôznobežné a rovnobežné. V prvom prípade majú nekonečne veľa spoločných bodov, v druhom jeden a v treťom ani jeden spoločný bod.
Ak bod leží na priamke, potom po dosadení súradníc bodu do rovnice priamky platí rovnosť (pri parametrickej rovnici vychádza ten istý parameter v obidvoch rovniciach). Ak dosadíme spoločný bod, potom v obidvoch rovniciach platí rovnosť. Čiže súradnice spoločného bodu sú riešením obidvoch rovníc. Toto už poznáme, v sústavách rovníc sme hľadali riešenia všetkých rovníc. Takže určenie vzájomnej polohy dvoch priamok znamená riešenie sústavy rovníc zostavených z rovníc priamok. Týmto spôsobom nie iba vzájomná poloha priamok, ale vzájomná poloha hocijakých geometrických útvarov (viď. neskoršie u kvadratických útvaroch) môžeme určiť, ktoré sú dané rovnicami – ich spoločným riešením sú spoločné body tých útvarov.

riešime sústavu:

a, jedno riešenie	⇒ jeden spoločný bod	⇒ priamky sú rôznobežné
b, nemá riešenie	⇒ nemajú spoločný bod	⇒ priamky sú rovnobežné
c, nekonečne veľa riešení	⇒ nekonečne veľa spoločných bodov	⇒ priamky sú totožné

príklad:

Určte priesečník daných priamok:

a, a: $x = 1 - 2t$, $y = 3 + t$
b: $x = 1 - 3u$, $y = -4 + 5u$

b, c: $x = -1 + 6t$, $y = 2 + 4t$
d, $x - 3y + 7 = 0$

c, e: $x = 3 + 2t$, $y = -1 - 5t$
f, $y = -\frac{5}{2}x + \frac{17}{2}$

d, g: $2x + 3y - 5 = 0$
h: $6x - 4y - 15 = 0$

e, i: $3x + y + 2 = 0$
j: $y = \frac{3}{4}x + 3$

f, k: $y = -\frac{1}{2}x + 5$
l: $y = 2x - 3$

a,
$$\begin{aligned} 1 - 2t &= 1 - 3u && /-1 \\ \underline{3 + t} &\underline{= -4 + 5u} && /-3 \\ -2t &= -3u \\ \underline{t} &\underline{= -7 + 5u} \\ -2(-7 + 5u) &= -3u \\ 14 - 10u &= -3u && /+10u \\ 14 &= 7u && /:7 \\ 2 &= u \end{aligned}$$

1 riešenie ⇒ rôznobežné

$x = 1 - 3.2 = 1 - 6 = -5$
$y = -4 + 5.2 = -4 + 10 = 6$
$a \cap b = \{P\}$: P(-5; 6)

---

b, $(-1 + 6t) - 3(2 + 4t) + 7 = 0$
$$\begin{aligned} -1 + 6t - 6 - 12t + 7 &= 0 \\ -6t &= 0 && /:(-6) \\ t &= 0 \end{aligned}$$

1 riešenie ⇒ rôznobežné

$x = -1 + 6.0 = -1$
$y = 2 + 4.0 = 2$
$c \cap d = \{P\}$: P(-1; 2)

---

c, $-1 - 5t = -\frac{5}{2}(3 + 2t) + \frac{17}{2}$
$-1 - 5t = -\frac{15}{2} - 5t + \frac{17}{2}$
$-1 - 5t = -5t + 1$ $\quad /+5t$
$-1 \neq 1$
nemá riešenie ⇒ $e \parallel f$

---

d, $2x + 3y - 5 = 0$ $\quad /.(-3)$

$$\underline{6x - 4y - 15 = 0}$$
$$-6x - 9y + 15 = 0$$
$$\underline{6x - 4y - 15 = 0}$$
$$-13y = 0 \qquad /:(-13)$$
$$y = 0$$

1 riešenie $\Rightarrow$ rôznobežné

$$2x + 3.0 - 5 = 0$$
$$2x - 5 = 0 \qquad /+5$$
$$2x = 5 \qquad /:2$$
$$x = 2,5$$

$g \cap h = \{P\}$: P(2,5; 0)

---

e, $3x + \left(\frac{3}{4}x + 3\right) + 2 = 0$

$$3x + \frac{3}{4}x + 3 + 2 = 0$$
$$\frac{15}{4}x + 5 = 0 \qquad /-5$$
$$\frac{15}{4}x = -5 \qquad /:\frac{15}{4}$$
$$x = -\frac{4}{3}$$

1 riešenie $\Rightarrow$ rôznobežné

$y = \frac{3}{4}.\left(-\frac{4}{3}\right) + 3 = -1 + 3 = 2$

$i \cap j = \{P\}$: $P\left(-\frac{4}{3}; 2\right)$

---

f, $-\frac{1}{2}x + 5 = 2x - 3 \qquad /.2$

$$-x + 10 = 4x - 6 \qquad /+x + 6$$
$$16 = 5x \qquad /:5$$
$$\frac{16}{5} = x$$

1 riešenie $\Rightarrow$ rôznobežné

$y = 2.\frac{16}{5} - 3 = \frac{32}{5} - 3 = \frac{17}{5}$

$k \cap l = \{P\}$: $P\left(\frac{16}{5}; \frac{17}{5}\right)$

Určte číslo p (parameter) tak, aby priamky dané rovnicami boli rovnobežné:

a, a: $x = 2 - t$
$y = -3 + 4t$
b: $px + y - 3 = 0$

b, c: $y = px + 1$
d: $2x - 5y - 3 = 0$

a, $p(2 - t) + (-3 + 4t) - 3 = 0$

keď priamky sú rovnobežné, sústava nemá riešenie → musíme dostať nepravdu

to dosiahneme, ak z rovnice eliminujeme neznámu (nie parameter!), ostáva rovnosť rôznych čísel

$$2p - pt - 3 + 4t - 3 = 0$$
$$-pt + 4t = 0$$
$$t(-p + 4) = 0$$
$$-p + 4 = 0$$
$$p = 4$$

---

b,

druhý spôsob je pomocou vektorov (smerových alebo normálových) priamok

priamka c je daná smernicovou rovnicou → obsahuje smernicu priamky

$k_c = p = \frac{s_2}{s_1}$

priamka d je daná všeobecnou rovnicou → obsahuje normálový vektor priamky

$\overrightarrow{n_d} = (2; -5) \Rightarrow \overrightarrow{s_d} = (5; 2) = \overrightarrow{s_c}$

$p = \frac{2}{5}$

Určte priesečník výšok trojuholníka ABC: A(1; -4), B(19; 2), C(11; 10).

v_a: AA_0

$\overrightarrow{s_a} = \overrightarrow{BC} = C - B = (-8; 8) \sim (-1; 1)$

$\overrightarrow{n_{v_a}} = \overrightarrow{s_a} \Rightarrow \overrightarrow{n_{v_a}} = (-1; 1)$

$-1x + 1y + c = 0$

$A \in v_a$

$-1.1 + 1.(-4) + c = 0$

$c = 5$

v_a: $-x + y + 5 = 0$

v_b: BB_0

$\overrightarrow{s_b} = \overrightarrow{AC} = C - A = (10; 14) \sim (5; 7)$

$\overrightarrow{n_{v_b}} = \overrightarrow{s_b} \Rightarrow \overrightarrow{n_{v_b}} = (5; 7)$

$5x + 7y + c = 0$

$B \in v_b$

$5.19 + 7.2 + c = 0$

$c = -109$

v_b: $5x + 7y - 109 = 0$

$-x + y + 5 = 0 \quad /.5$

$5x + 7y - 109 = 0$

$-5x + 5y + 25 = 0$

$5x + 7y - 109 = 0$

$12y - 84 = 0 \quad /+84$

$12y = 84 \quad /:12$

$y = 7$

$-x + 7 + 5 = 0$

$-x + 12 = 0$

$12 = x$

$v_a \cap v_b = \{V\}$: $V(12; 7)$