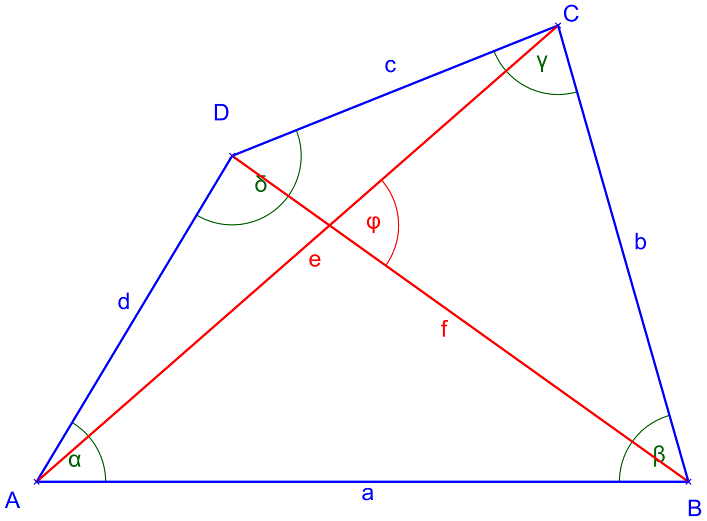
A négyszög kerülete és területe

(Obvod a obsah štvoruholníka)

D. Egy sík négy pontja, melyek közül semelyik három nem kollineáris (nem fekszik egy egyenesen), meghatároz egy négyszöget. Ezen pontok (A, B, C, D) a négyszög csúcsai.



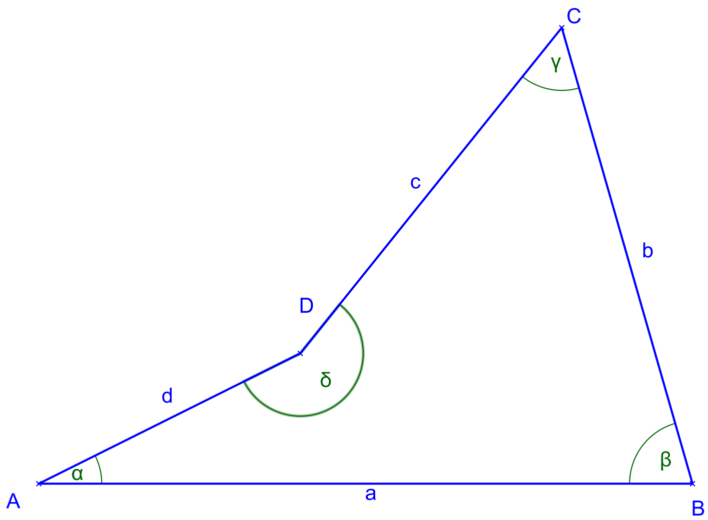
a négyszög oldalai (a, b, c, d) – a szomszédos csúcsokat összekötő szakaszok
a négyszög belső szögei (α, β, γ, δ) – a szomszédos oldalak szöge, ahol a szögtartomány a négyszög belseje
a négyszög átlói (e, f) – a szemközti csúcsokat összekötő szakaszok
a négyszög átlóinak szöge (φ)

T. A négyszög belső szögeinek összege 360°.

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$$

a négyszögek osztályozása belső szögeik alapján

- konvex négyszög – minden belső szöge kisebb 180°-nál
- konkáv négyszög – pontosan egy belső szöge nagyobb 180°-nál



konkáv négyszög

párhuzamos oldalak száma szerint

- négyszög – nincs párhuzamos oldala (általános négyszög, deltoid)
- trapéz – két oldala (szemközti) párhuzamos
- paralelogramma – két-két oldala párhuzamos (paralelogramma, rombusz, téglalap, négyzet)

egybevágó oldalak száma szerinti osztályozás

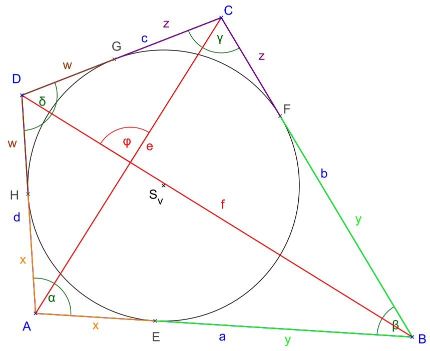
- négy – négyzet, rombusz
- három – trapéz
- két-két – paralelogramma, deltoid
- két – trapéz
- nincs – általános négyszög

különleges tulajdonság szerinti osztályozás

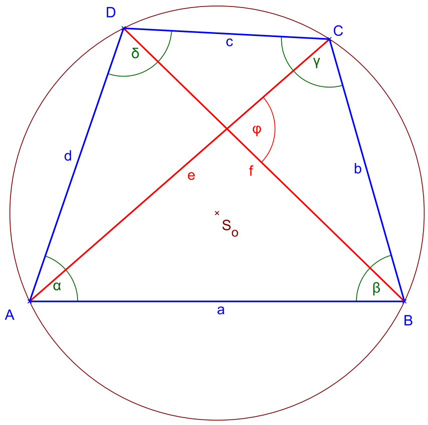
érintőnégyszög – létezik beírt kör (négyzet, rombusz, deltoid, általános négyszög is lehet) – a négyszög minden oldala egyazon kör érintője

húrnégyszög – létezik körülírt kör (négyzet, téglalap, egyenlő szárú trapéz, deltoid, általános négyszög is lehet) – a négyszög minden oldala egyazon kör húrja

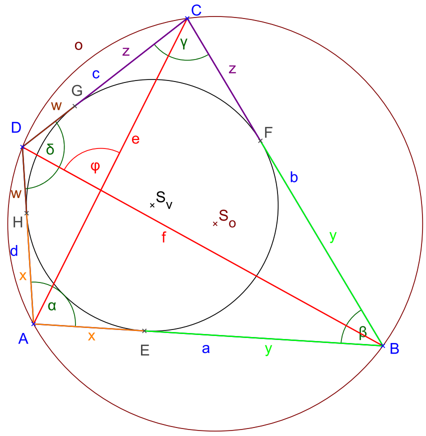
bicentrikus négyszög – létezik beírt- és körülírt kör is (négyzet, deltoid, általános négyszög is lehet)



érintőnégyszög

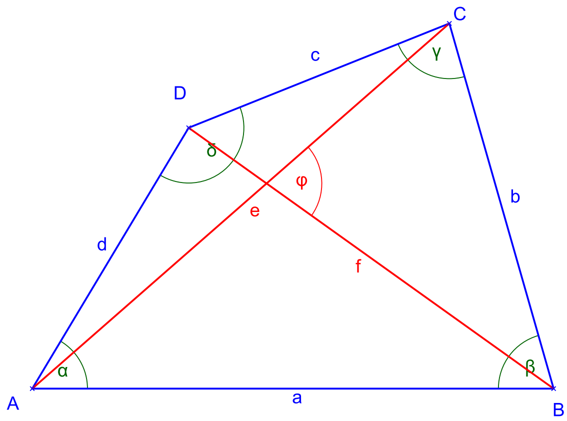


húrnégyszög



bicentrikus négyszög

1. általános négyszög (všeobecný štvoruholník)



$$o = a + b + c + d$$

$$S = \frac{ef.\sin\varphi}{2}$$

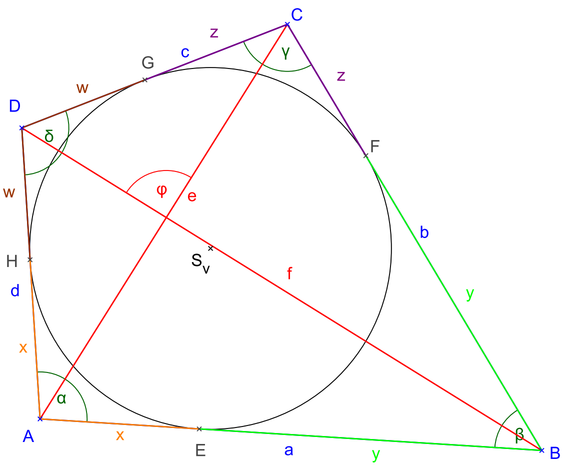
$s = \frac{a+b+c+d}{2} = \frac{o}{2}$ $\qquad\theta = \frac{\alpha+\gamma}{2} \vee \frac{\beta+\delta}{2}$

Bretschneider-formula

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd.\cos^2\theta}$$

2. érintőnégyszög (dotyčnicový štvoruholník)

D. Olyan négyszög, melybe kört írhatunk.



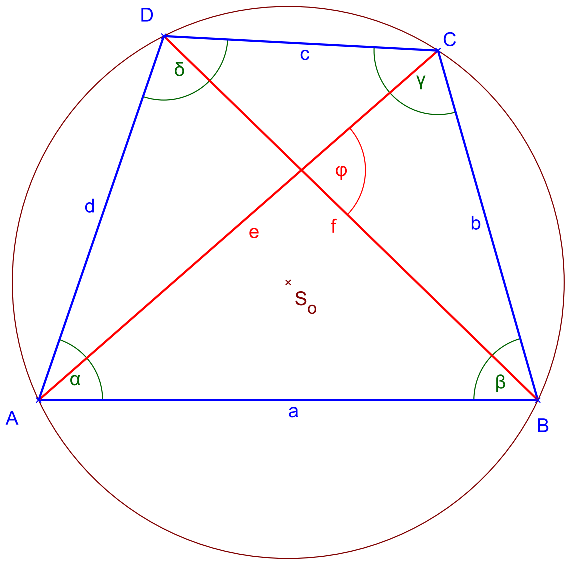
oldalaira érvényes:

$a + c = b + d$

$S = s.\rho$

3. húrnégyszög (tetivový štvoruholník)

D. Olyan négyszög, mely köré kört írhatunk.



oldalaira érvényes *Ptolemaiosz* tétele:

$a.c + b.d = e.f$

belső szögeire érvényes:

$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$

Brahmagupta-tétel

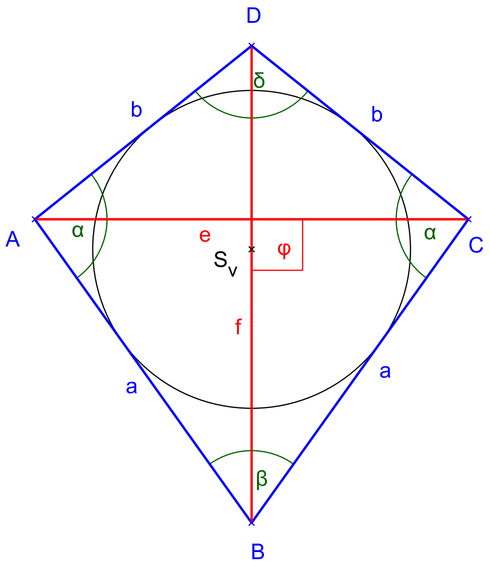
$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

Brahmagupta-tétel bicentrikus négyszögre

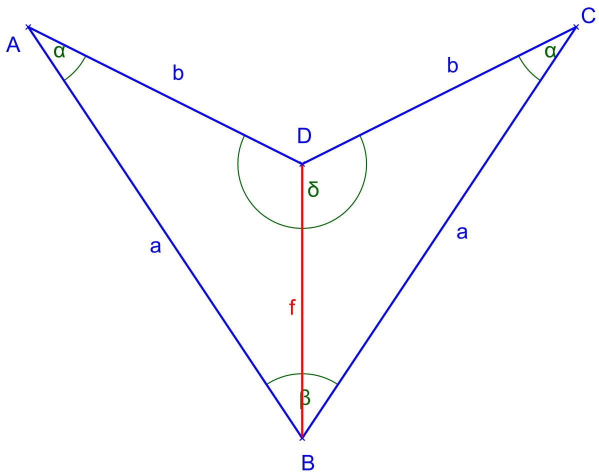
$S = \sqrt{abcd}$

4. deltoid

D. Olyan négyszög, melynek két-két szomszédos oldala egybevágó.



konvex



konkáv

T.

két belső szöge egybevágó

átlói különböznek ($e \neq f$)

átlói merőlegesek egymásra

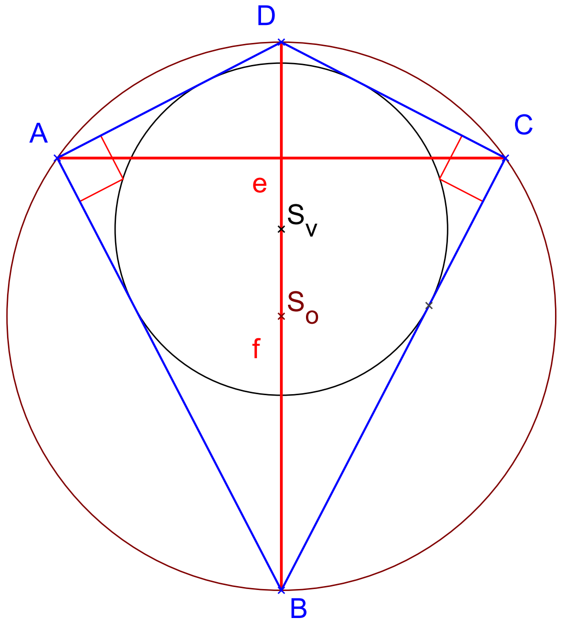
az egyik átlója felezi a másikat

M. Minden konvex deltoidnak van beírt köre (érintőnégyszög).

$o = 2(a + b)$

$S = \frac{ef}{2}$

4.a, bicentrikus deltoid – derékszögű deltoid



$S = a.b$

5. trapéz (lichobežník)

D. Olyan négyszög, melynek pontosan két szemközti oldala párhuzamos.

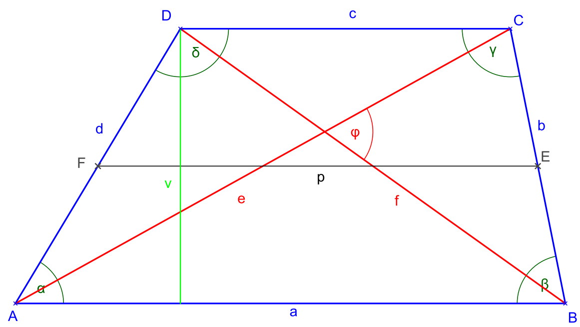
alapok (a, c) – a két párhuzamos oldal
szárak (b, d) – a két nem párhuzamos oldal
magasság (v) – a párhuzamos oldalak távolsága
a trapéz középvonala (p) – a szárak felezőpontjait összekötő szakasz – az alapok számtani közepe: $p = \frac{a+c}{2}$

$$S = \frac{a+c}{2}.v = p.v = \frac{a+c}{4(a-c)}\sqrt{(a+b-c+d)(a-b-c+d)(a+b-c-d)(-a+b+c+d)}$$

magasságát kiszámíthatjuk oldalai ismeretében

$$v = \sqrt{d^2 - \left(\frac{d^2-b^2+(a-c)^2}{2(a-c)}\right)^2}$$

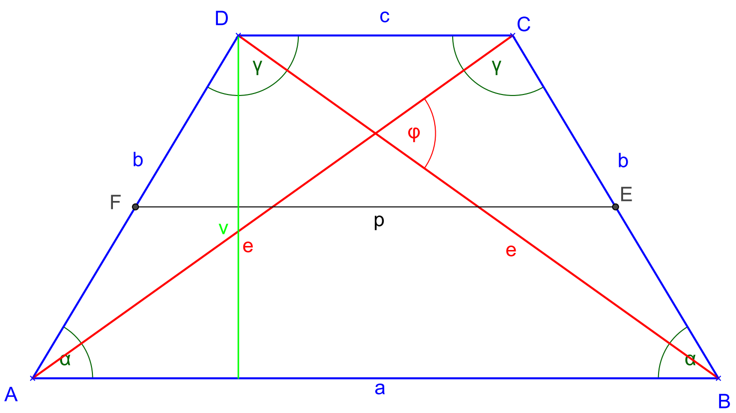
5.a, általános trapéz



T.

az egy száron nyugvó szögek összege 180° (váltószögek: $\alpha + \delta = \beta + \gamma = 180°$)
minden belső szöge különböző
átlói különbözők ($e \neq f$)
átlói nem merőlegesek
átlói nem felezik egymást

5.b, egyenlő szárú (húr-) trapéz

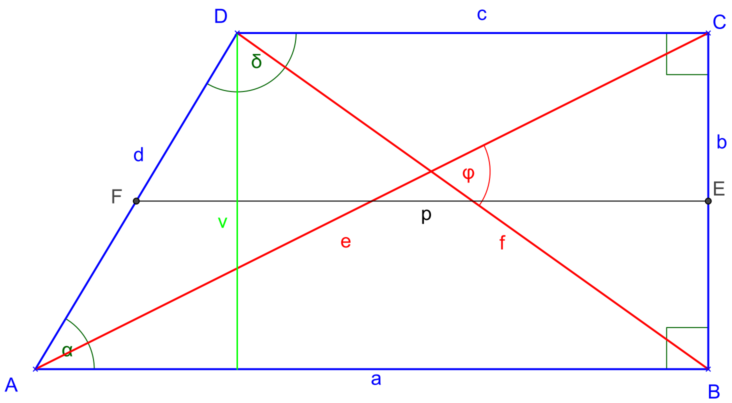


T.

szárai egybevágóak (b = d)
az alapokon fekvő szögek egybevágóak ($\alpha = \beta \wedge \gamma = \delta$)
átlói egybevágóak (e = f)
átlói nem felezik egymást

$S = (a - b.\cos \alpha)b.\sin \alpha = (c + b.\cos \alpha)b.\sin \alpha$

5.c, derékszögű trapéz

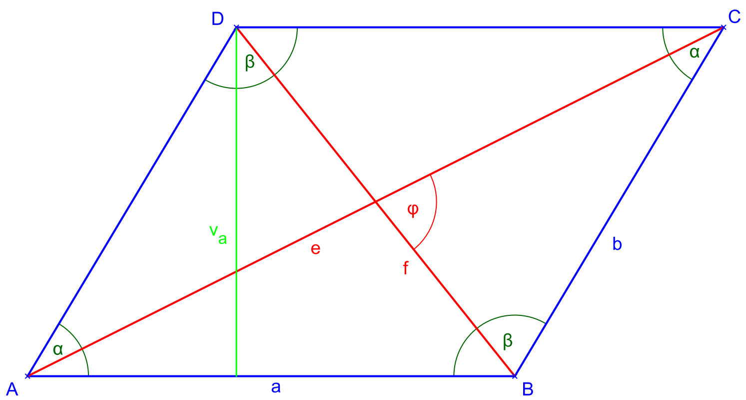


T.

átlói különbözők ($e \neq f$)
átlói nem merőlegesek
átlói nem felezik egymást

6. paralelogramma (rovnobežník)

D. Olyan négyszög, melynek szemközti oldala párhuzamosak.



T.

szemközti oldalai egybevágóak ($a = c \wedge b = d$)
szemközti szögei egybevágóak ($\alpha = \gamma \wedge \beta = \delta$)
szomszédos szögek összege 180°
átlói különbözők ($e \neq f$)
átlói nem merőlegesek

átlói felezik egymást

$o = 2(a + b)$

$S = a.v_a = a.b.\sin\alpha = a.b.\sin\beta = \frac{ef.\sin\varphi}{2}$

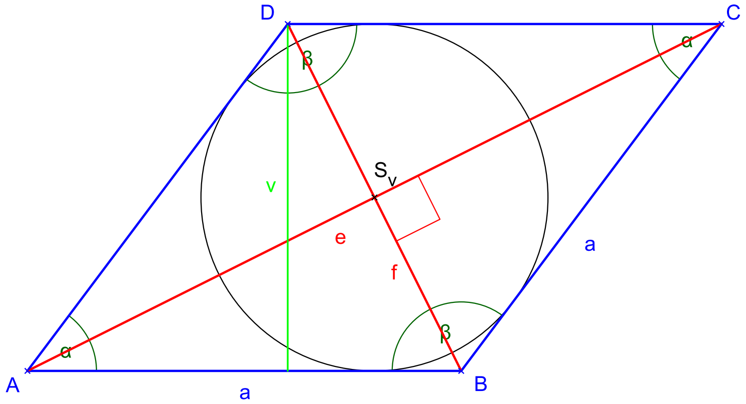
T.

$2(a^2 + b^2) = e^2 + f^2$

$e = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab.\cos\alpha}$ $\quad$ $f = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab.\cos\alpha}$

7. rombusz (kosoštvorec)

D. Olyan paralelogramma, melynek oldalai egybevágóak.



T.

szemközti szögei egybevágóak ($\alpha = \gamma \wedge \beta = \delta$)
szomszédos szögek összege 180°
átlói különbözők ($e \neq f$)
átlói merőlegesek
átlói felezik egymást
átlói felezik a belső szögeket

M. A rombuszhoz mindig létezik beírt kör (érintőnégyszög).

$o = 4a$

$S = a.v = a^2.\sin\alpha = a^2.\sin\beta = \frac{ef}{2}$

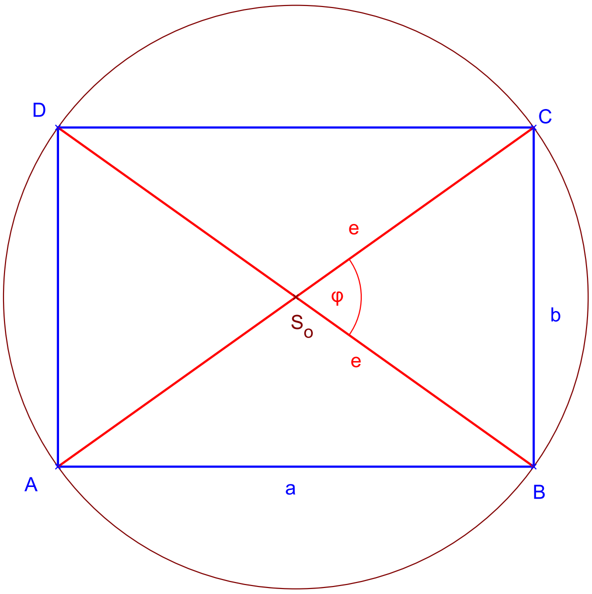
T.

$e^2 + f^2 = 4a^2$ $\quad$ $\rho = \frac{v}{2}$

$e = 2a.\cos\frac{\alpha}{2}$ $\quad$ $f = 2a.\sin\frac{\alpha}{2}$

8. téglalap (obdĺžnik)

D. Olyan paralelogramma, melynek belső szögei egybevágóak (90°).



T.

átlói egybevágóak (e = f)
átlói nem merőlegesek
átlói felezik egymást

M. A téglalaphoz mindig létezik körülírt kör (húrnégyszög).

$o = 2(a + b)$

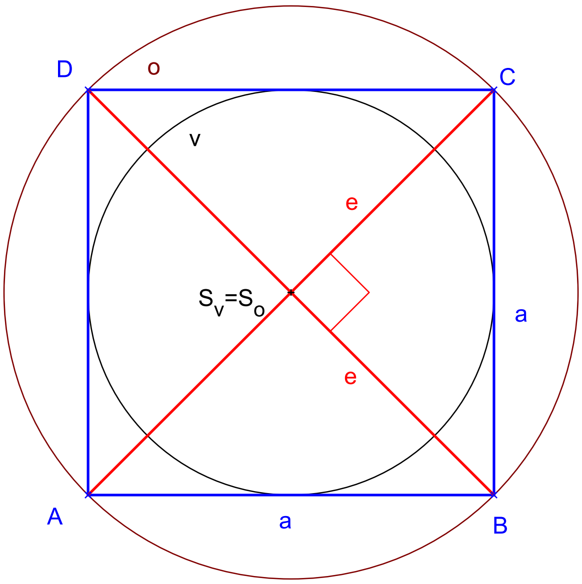
$S = a.b = \frac{e^2.\sin\varphi}{2}$

T.

$e^2 = a^2 + b^2$ $\qquad$ $r = \frac{e}{2}$

9. négyzet (štvorec)

D. Olyan paralelogramma, melynek oldalai és belső szögei is egybevágóak.



T.

átlói egybevágóak (e = f)
átlói merőlegesek
átlói felezik egymást
átlói felezik a belső szögeket

M. A négyzethez mindig létezik beírt és körülírt kör is (bicentrikus négyszög).

$o = 4a$

$S = a^2 = \frac{e^2}{2}$

T.

$e = a\sqrt{2}$ $\rho = \frac{a}{2}$ $r = \frac{e}{2}$

példa:

Számítsuk ki a négyzet S területét és o kerületét, ha átlója e = 8.

$$a^2 + a^2 = e^2$$
$$2a^2 = e^2$$
$$a^2 = \frac{e^2}{2} = \frac{8^2}{2} = 32 = S \;\longrightarrow\; a = \sqrt{32} = 5{,}657$$
$$o = 4a = 4.5{,}657 = 22{,}627$$

Számítsuk ki a téglalap területét, ha kerülete 30,6 és egyik oldalának hossza 6,8.

$$o = 2(a + b) \;\longrightarrow\; b = \frac{o}{2} - a = 15{,}3 - 6{,}8 = 8{,}5$$
$$S = a.b = 6{,}8.8{,}5 = 57{,}8$$

Számítsuk ki a rombusz területét, ha kerülete o = 104 és átlói aránya $\frac{e}{f} = \frac{5}{12}$.

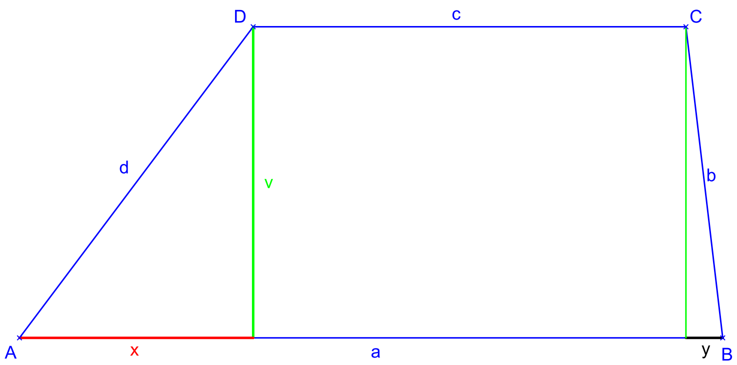
$$o = 4a \;\longrightarrow\; a = \frac{o}{4} = \frac{104}{4} = 26$$
$$e = \frac{5}{12}.f$$
$$a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 = \frac{e^2}{4} + \frac{f^2}{4} = \frac{\left(\frac{5}{12}.f\right)^2}{4} + \frac{f^2}{4} = \frac{\frac{25}{144}.f^2}{4} + \frac{f^2}{4} = \frac{25.f^2}{576} + \frac{f^2}{4} = \frac{25.f^2+144.f^2}{576} = \frac{169.f^2}{576}$$
$$a = \frac{13.f}{24} \;\longrightarrow\; f = \frac{24.a}{13} = \frac{24.26}{13} = 48$$
$$e = \frac{5}{12}.f = \frac{5}{12}.48 = 20$$
$$S = \frac{ef}{2} = \frac{20.48}{2} = 480$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2} = \frac{\frac{e}{2}}{\frac{f}{2}} = \frac{e}{2}.\frac{2}{f} = \frac{e}{f} = \frac{5}{12} = 0{,}416\,\overline{6} \;\longrightarrow\; \frac{\alpha}{2} = \mathrm{tg}^{-1}\,0{,}416\,\overline{6} = 22°37'$$
$$\beta = 45°14'$$
$$S = a^2.\sin\beta = 26^2.\sin 45°14' = 480$$

Számítsuk ki a paralelogramma területét, ha ismertek átlói e = 14 és f = 10, illetve az általuk bezárt szög φ = 55°.

$$S = \frac{e.f.\sin\varphi}{2} = \frac{14.10.\sin 55°}{2} = 57{,}341$$

Számítsuk ki az ABCD trapéz területét, ha oldalai: a = 65; b = 29; c = 40; d = 36



$$x + y = a - c = 65 - 40 = 25$$

$$\left.\begin{aligned} d^2 &= x^2 + v^2 \\ b^2 &= y^2 + v^2 \end{aligned}\right\}\;\; \text{I.} + (-1).\text{II.}$$

$$d^2 - b^2 = x^2 - y^2$$
$$36^2 - 29^2 = x^2 - y^2$$

$455 = x^2 - y^2$
$455 = (x + y)(x - y)$
$455 = 25(x - y)$ /:25

$$\left.\begin{aligned} 18{,}2 &= x - y \\ 25 &= x + y \end{aligned}\right\} \quad \text{I. + II.}$$

$43{,}2 = 2x$ /:2
$21{,}6 = x$

$36^2 = 21{,}6^2 + v^2$
$v = \sqrt{36^2 - 21{,}6^2} = 28{,}8$
$S = \frac{a+c}{2}.v = \frac{65+40}{2}.28{,}8 = 1\,512$