Logaritmusos/logaritmikus egyenletek
(Logaritmické rovnice)

D. Az egyenlet ***logaritmusos***, ha ismeretlent tartalmaz a logaritmus argumentumában.

A logatitmusfüggvény kölcsönösen egyértelmű → minden függvényértéket (y értéket) csak egyszer vesz fel (vagy monoton növekvő, vagy monoton csökkenő az egész értelmezési tartományon). Pontosan ezt használjuk fel az logaritmusos egyenletek megolásánal.

T. $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$

Ha olyan alakra hozzuk egyenletünket, hogy két azonos alapú logaritmus egyenlő, akkor elegendő az argumentumok egyenlőségét megoldanunk – vagyis a keletkező egyenlet egyszerűbb, általában már nem logaritmusos.
Mivel a logaritmusfüggvény csak pozitív számokra van értelmezve, ezért első lépésben feltételt kell szabnunk, csak utána kezdhetün neki az egyenlet átalakításához.

M. Természetesen ezen típusú egyenlet teljes megoldásához is hozzátartozik az ellenőrzés.

példa:

Oldjuk meg az egyenletet: $\log_3 (x - 12) = 2$.

a feltétellel kezdünk

$x - 12 > 0 \qquad /+12$

$x > 12$

a jobb oldalon álló számból szintén 3-as alapú logaritmust készítünk → ha a logaritmus alapját a logaritmus értékére emeljük, megkapjug a logaritmus argumentumát

$\log_3 (x - 12) = \log_3 3^2$

azonos alapú logaritmusok egyenlőségét kaptuk ⇒ ez az argumentumok egyenlőségét jelenti

$x - 12 = 9 \qquad /+12$

$x = 21$

Oldjuk meg az egyenletet: $\log (x - 4) + \log (x + 3) = \log (5x + 4)$.

a feltételekkel kezdünk

$x - 4 > 0 \qquad /+4$

$x > 4$

$x + 3 > 0 \qquad /-3$

$x > -3$

$5x + 4 > 0 \qquad /-4$

$5x > -4 \qquad /:5$

$x > \frac{-4}{5}$

a legszigorúbb feltétel (magába foglalja a többit) $x > 4$: ha ez igaz, akkor a többi is → elegendő lesz az eredményt ezzel a feltétellel összehasonlítani

$\log (x - 4) + \log (x + 3) = \log (5x + 4)$

a bal odalon összevonjuk a logaritmusokat

$\log (x - 4).(x + 3) = \log (5x + 4)$

ezek után elegendő az argumentumok egyenlőségét írnunk

$(x - 4).(x + 3) = 5x + 4$

$x^2 + 3x - 4x - 12 = 5x + 4$

$x^2 - x - 12 = 5x + 4 \qquad /-5x - 4$

nullára redukáljuk a másodfokú egyenletet

$x^2 - 6x - 16 = 0$

gyöktényezős alakra hozzuk

$(x - 8)(x + 2) = 0$

$x - 8 = 0 \qquad x + 2 = 0$

$x_1 = 8 \qquad x_2 = -2$

a második eredmény nem elégíti ki a feltételt

$x = 8$

Oldjuk meg az egyenletet: $\frac{1-\log x}{1+\log x} = \sqrt{3}$.

a feltételekkel kezdünk

$x > 0$

$1 + \log x \neq 0 \quad /-1$

$\log x \neq -1$

$\log x \neq \log 10^{-1}$

$x \neq 0{,}1$

$\frac{1-\log x}{1+\log x} = \sqrt{3} \quad /.(1 + \log x)$

eltüntetjük a törtet

$1 - \log x = \sqrt{3}.(1 + \log x)$

$1 - \log x = \sqrt{3} + \sqrt{3}.\log x \quad /+\log x - \sqrt{3}$

szétválogatjuk a tagokat: az egyik oldalra a log x-et tartalmazókat a másikra a többit

$1 - \sqrt{3} = \sqrt{3}.\log x + \log x$

jobb oldalon kiemeljük a log x-et

$1 - \sqrt{3} = \log x\left(\sqrt{3} + 1\right) \quad /:\left(\sqrt{3} + 1\right)$

$\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \log x$

$\log x = \log 10^{\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}}$

$x = 10^{\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}} = 0{,}539\ 6$

kielégíti a feltételeket

$x = 0{,}539\ 6$