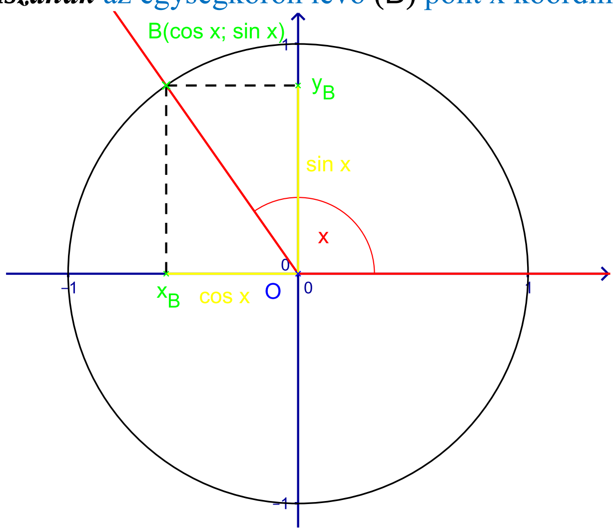
Az általános szög szögfüggvényei
(Goniometrické funkcie obecného uhla)

Adott egy x irányított szög, melyet csúcsával a koordináta-rendszer kezdőpontjába (origó) helyezünk úgy, hogy nyugvó szára az x tengely pozitív fele legyen. Továbbá adott egy egységkör középpontjában az origóban. Ekkor az irányított szög mozgó szára az egységkört a B pontban metszi.

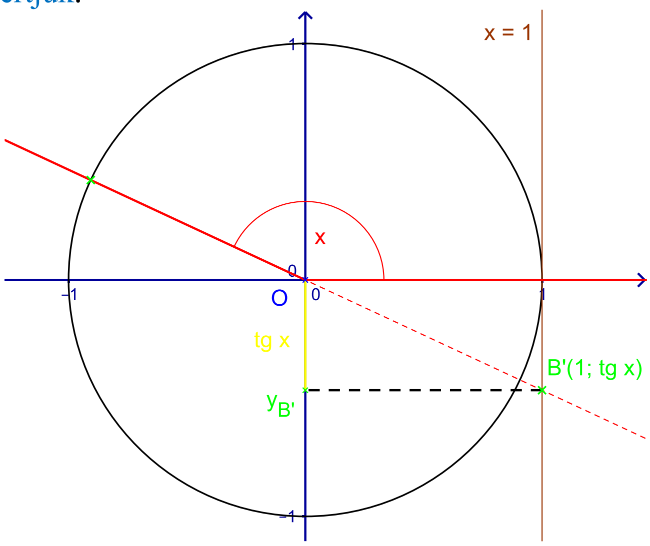
D. Egy x irányított szög ***szinuszának*** az egységkörön levő (B) pont y koordinátáját értjük.

D. Egy x irányított szög ***koszinuszának*** az egységkörön levő (B) pont x koordinátáját értjük.



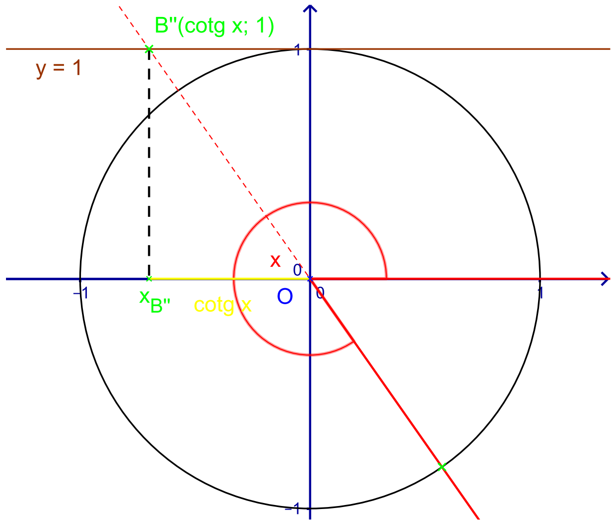
Az előző objektumainkat kiegészítjük az egységkör (1; 0) pontbeli érintőjével – az x = 1 egyenletű egyenessel. Ekkor a mozgó szár (vagy az ő tartóegyenese ← az ellentett félegyenessel való kiegészítése) a B′ pontban metszi az érintőt.

D. Egy x irányított szög ***tangens***én a mozgószár tartóegyenesének és az egységkör x = 1 egyenletű érintője közös (B′) pontjának y koordinátáját értjük.



Most a függőleges érintő helyett az egységkör (0; 1) pontbeli érintőjével – az y = 1 egyenletű egyenessel egészítjük ki az eredeti objektumainkat. Ekkor a mozgó szár (vagy az ő tartóegyenese ← az ellentett félegyenessel való kiegészítése) a B″ pontban metszi az érintőt.

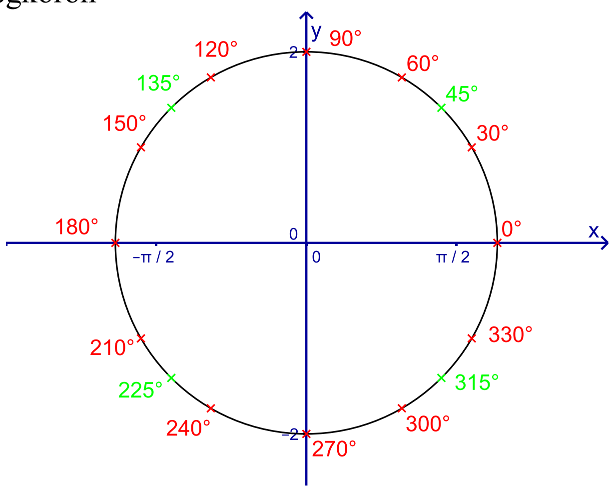
D. Egy x irányított szög ***kotangens***én a mozgószár tartóegyenesének és az egységkör y = 1 egyenletű érintője közös (B″) pontjának x koordinátáját értjük.



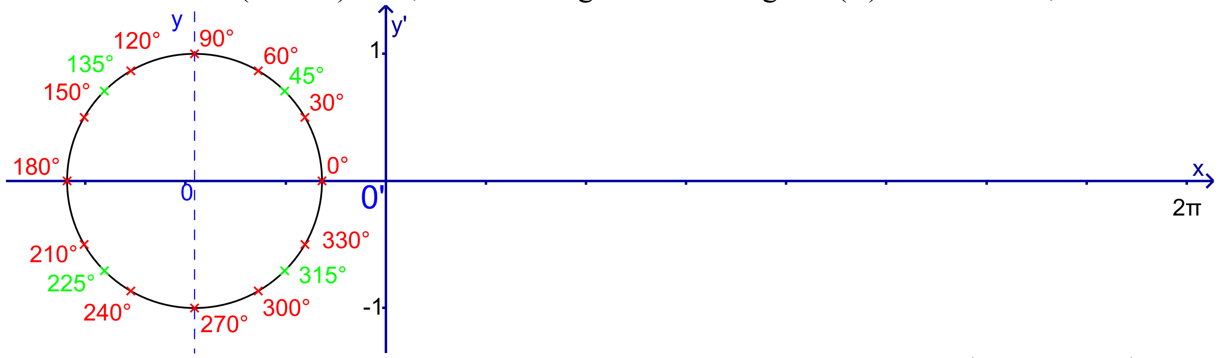
1. a szinusz függvény

grafikon „szerkesztése“

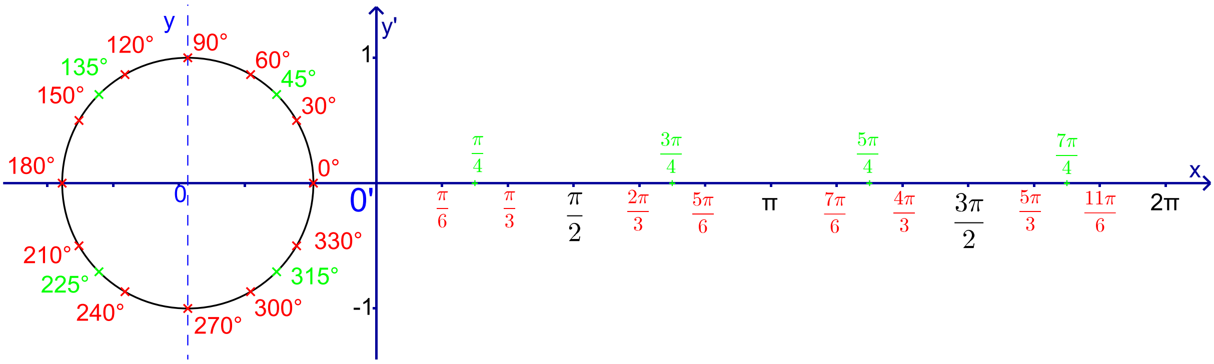
- koordináta-rendszerünkben felveszünk egy egységkört origó középponttal – az egységet magunk választjuk meg (például egy r = 2 *cm* sugarú körrel a szerkesztés még elfér a füzetben)
- először felosztjuk körünket 30°-onként $\left(\frac{\pi}{6}\ rad\right)$ + kijelüljük a síknegyedek (kvadránsok) felezőit – mindezt csak az egységkörön



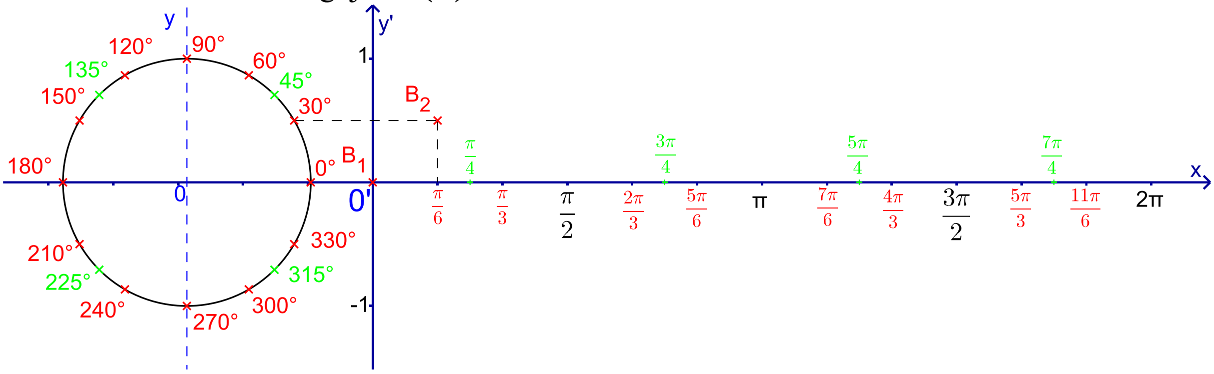
- ezután felveszünk egy eltolt koordináta-rendszert: az x' tengely azonos az x tengellyel; az y' tengely pedig eltolt – a körtől jobbra
- az x tengelyre a szögek ívmértékben kerülnek – az adott szöghöz tartozó ív hossza: r = 2 *cm* esetén a körvonal hossza (kerület) $2\pi.2$, ez a távolsága az eltolt origótól (0') → $2\pi.2 = 12{,}57$ *cm*



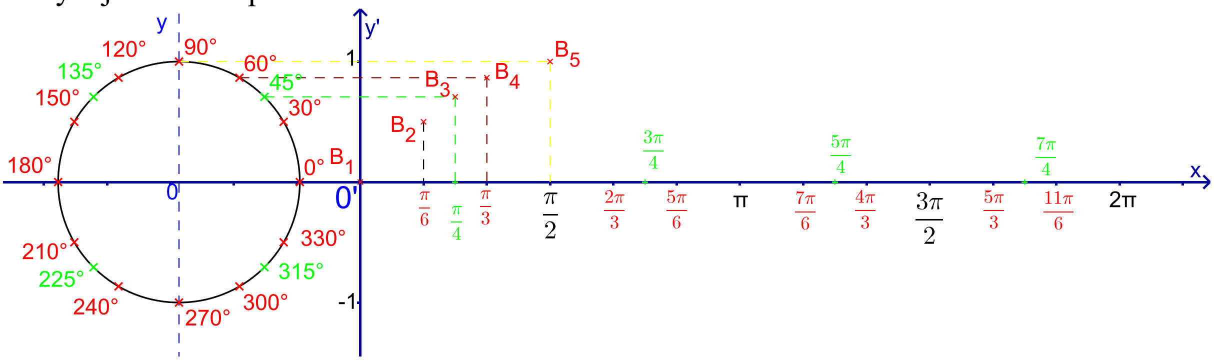
- az 0'-2π szakaszt 12 egyenlő részre osztjuk + felezőpontok: a $\frac{\pi}{6}$ és $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$ és $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$ és $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$ és $\frac{11\pi}{6}$ között.

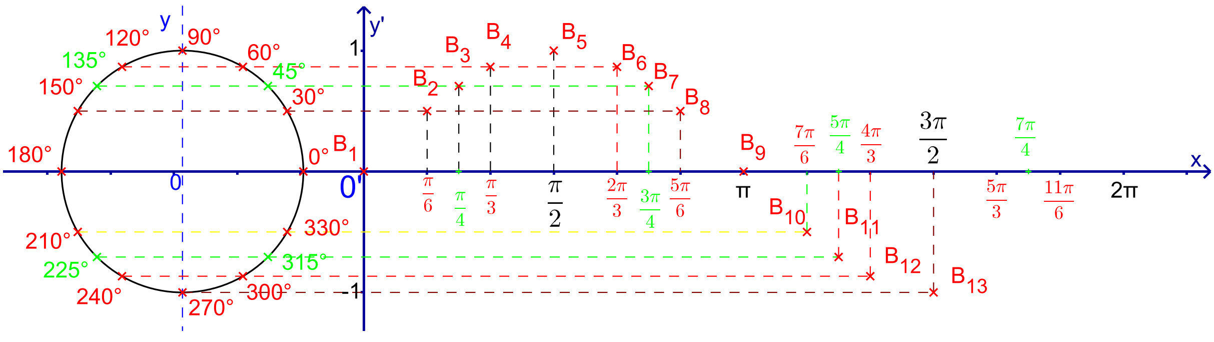


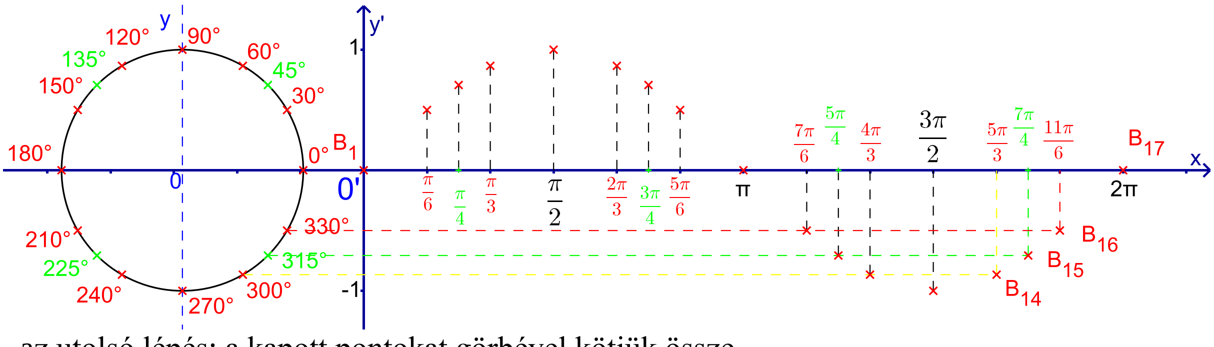
- mivel az x irányított szög szinusza a pont y koordinátája, így az x tengely megfelelő pontjában felvisszük az egységkörön lévő pont x tengelytől való távolságát (a pontból az x tengellyel párhuzamosan találjuk meg a grafikon pontját)
- az első pont a 0°-os szöghöz tartozik – mivel ez az x tengelyen van, a B_1 pont azonos az eltolt koordináta-rendszer origójával (0')



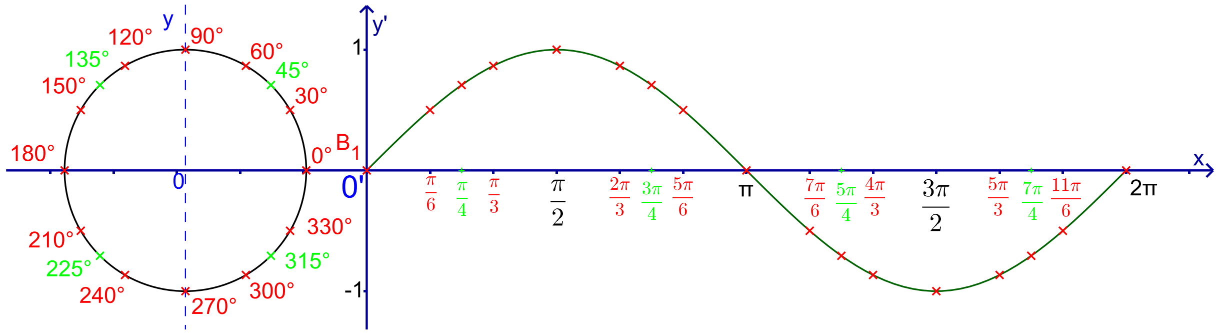
- folytatjuk a többi ponttal



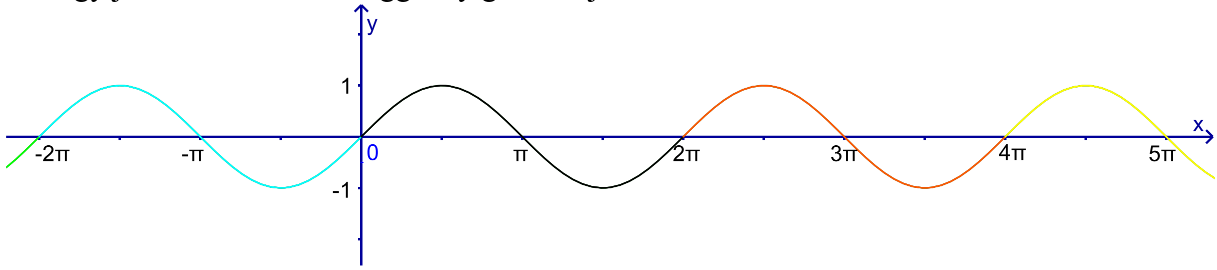




- az utolsó lépés: a kapott pontokat görbével kötjük össze



M. Ha az irányított szögekkel folytatnánk 360° után is, akkor a pontunk az egyégkörön szintén tovább mozogna és újra meg újra ugyanazt a pályát járná be, így folytatásként ugyanazt a görbét kapjuk. Hasonló módon a negatív szögekkel is. Így jön létre a szinusz függvény grafikonja.



Ez egyes függvényeknek egy új tulajdonsága amivel eddig még nem találkoztunk – a függvényértékek egy bizonyos szakasz után ismétlődnek.

D. Az f függvény ***periodikus***, ha van olyan pozitív ***p*** szám (periódus), hogy a függvény az x pontban ugyanazt a függvényértéket veszi fel, mint ***p***-vel odébb.

$$\exists p > 0 \colon \forall x \in D_f \Rightarrow f(x) = f(x + p)$$

Mivel a periodikus függvényeknél a függvényértékek ismétlődésével a tujajdonságok is ismétlődnek, így ezen függvényeket elegendő megvizsgálnunk egy perióduson (az alap periódus: $\langle 0; 2\pi \rangle$) – utána ezeket kiterjeszthetjük a függvény egész értelmezési tartományra.

$D_f = \mathbb{R}$

$H_f = \langle -1; 1 \rangle$

G. szinusz görbe

M. $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ m.↑

$x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ m.↓

Z.H. XY(0; 0); $X_1(\pi; 0)$; $X_2(2\pi; 0)$

Sz.É. az $x_1 = \frac{\pi}{2}$ pontban lokális maximuma van

az $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ pontban lokális minimuma van

Pá. páratlan függvény: $\sin(-x) = -\sin x$

Pe. periodikus függvény és a periódus hossza: $p = 2\pi = 360°$

ha a tulajdonságokat kiterjesztjük az egész értelmezési tartományra: $k \in \mathbb{Z}$

M. $x \in \left(\frac{(4k-1)\pi}{2}; \frac{(4k+1)\pi}{2}\right)$ m.↑

$x \in \left(\frac{(4k+1)\pi}{2}; \frac{(4k+3)\pi}{2}\right)$ m.↓

Z.H. $X_k(k.\pi; 0)$

Sz.É. az $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k.\pi$-ben lokális maximuma van

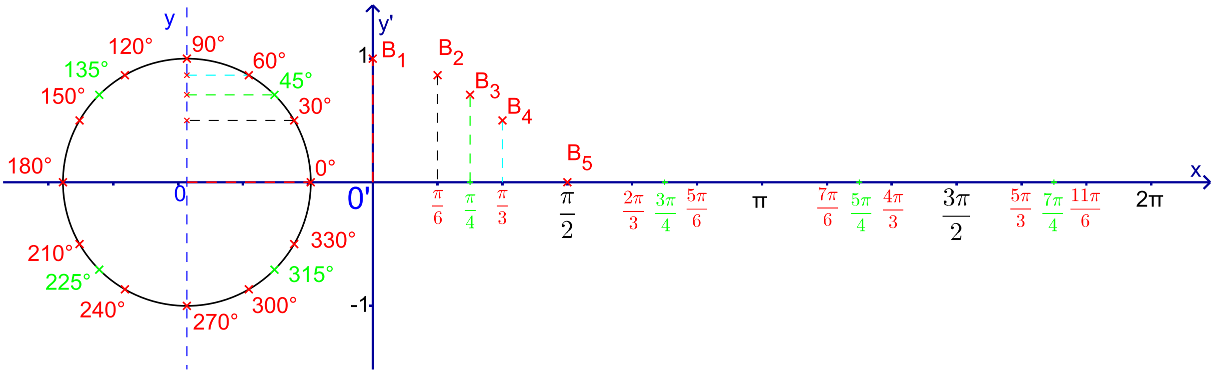
az $x_k = \frac{3\pi}{2} + 2k.\pi$-ben lokális minimuma van

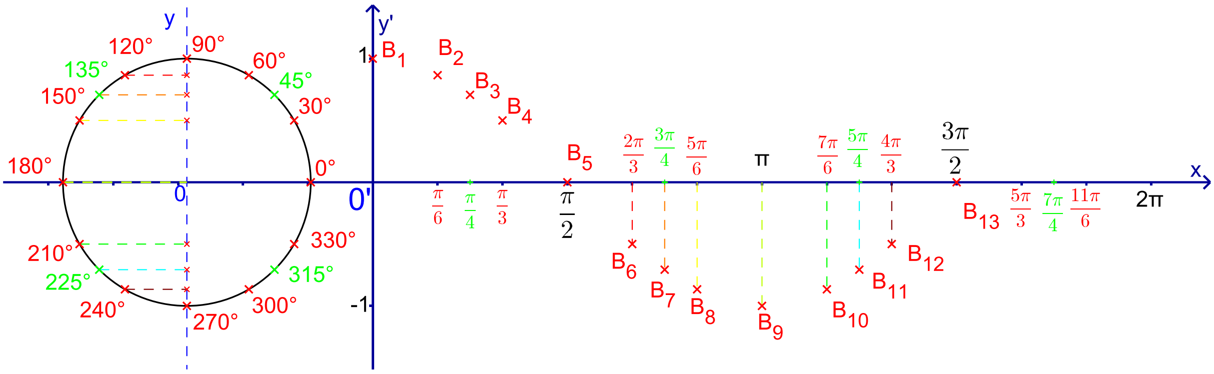
2. a koszinusz függvény

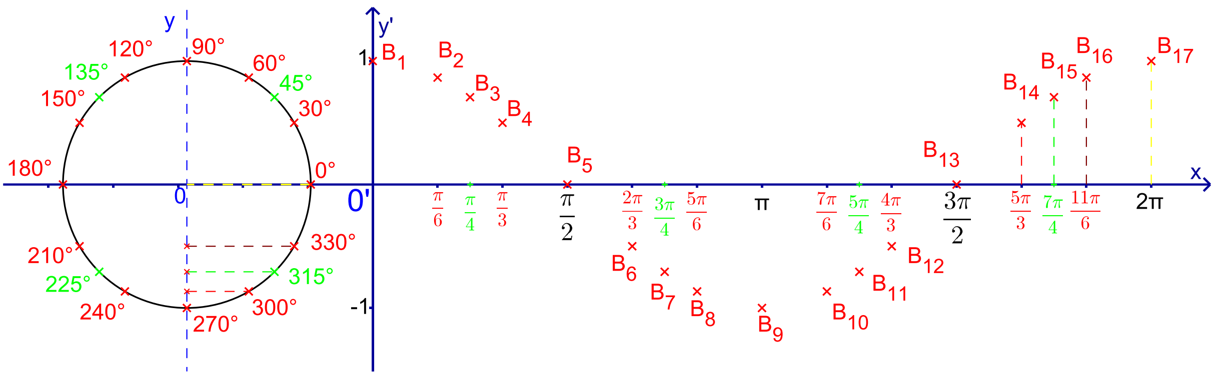
„grafikon „szerkesztése"

- hasonlóan járunk el a koszinusz függvénynél is – különbség csak a pontok felvitelében van
- mivel az x irányított szög koszinusza a pont x koordinátája, így az x tengely megfelelő pontjában felvisszük az egységkörön lévő pont y tengelytől való távolságát
  - ha a pont jobbra van az y tengelytől (a 30°-60° továbbá a 300°-330° pontok), akkor az x tengely felé kerül (a B_1-B_4 továbbá a B_{14}-B_{17})

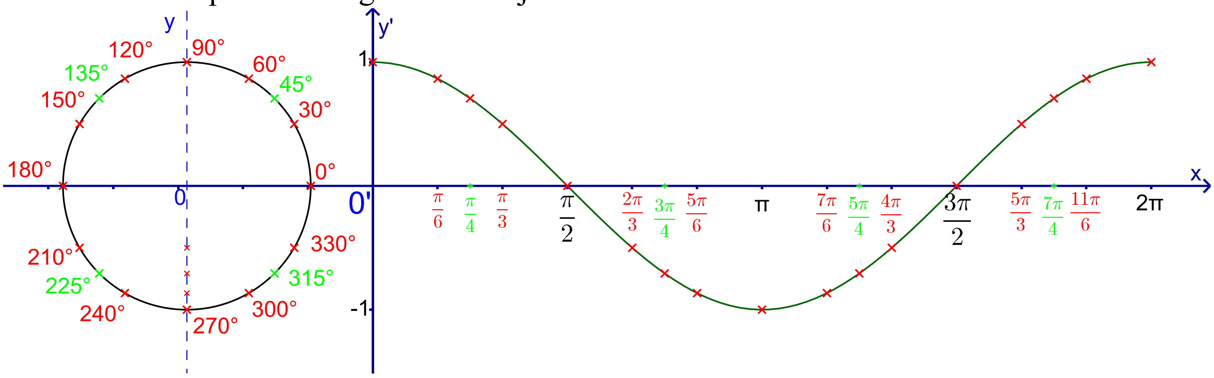
- ha a pont balra van az y tengelytől (a 120°-240° pontok), akkor az x tengely alá kerül (B_6-B_{12})



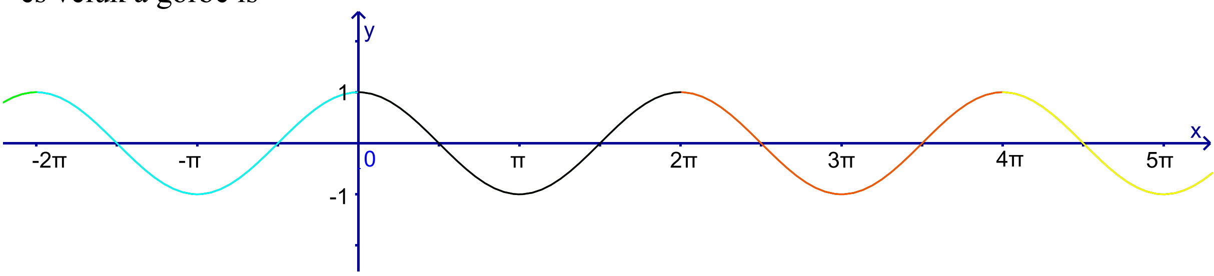




- utána ezeket a pontokat is görbével kötjük össze



- a koszinusz függvény sem végződik a 360°-os irányított szögnél – itt is ismétlődnek a függvényértékek és velük a görbe is



tulajdonságok az alapintervallumon

$D_f = \mathbb{R}$

$H_f = \langle -1; 1 \rangle$

G. koszinusz görbe

M. $x \in (0; \pi)$ m.↓

$x \in (\pi; 2\pi)$ m.↑

Z.H. $X_1\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$; $X_2\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$

$Y(0; 1)$

Sz.É. az $x_1 = 0$ és az $x_2 = 2\pi$ pontokban lokális maximuma van

az $x_3 = \pi$ pontban lokális minimuma van

Pá. páros függvény: $\cos(-x) = \cos x$

Pe. periodikus függvény és a periódus hossza: $p = 2\pi = 360°$

ha a tulajdonságokat kiterjesztjük az egész értelmezési tartományra: $k \in \mathbb{Z}$

M. $x \in (2k.\pi; (2k+1).\pi)$ m.↓

$x \in ((2k-1).\pi; 2k.\pi)$ m.↑

Z.H. $X_k\left(\frac{\pi}{2} + k.\pi; 0\right)$

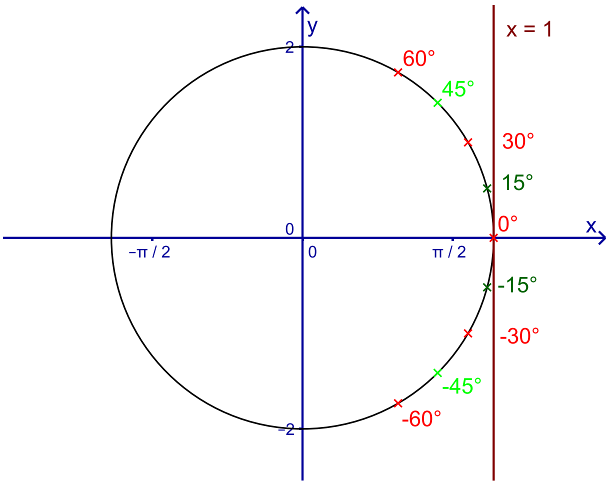
Sz.É. az $x_k = 2k.\pi$ pontban lokális maximuma van

az $x_k = (2k+1).\pi$ pontban lokális minimuma van

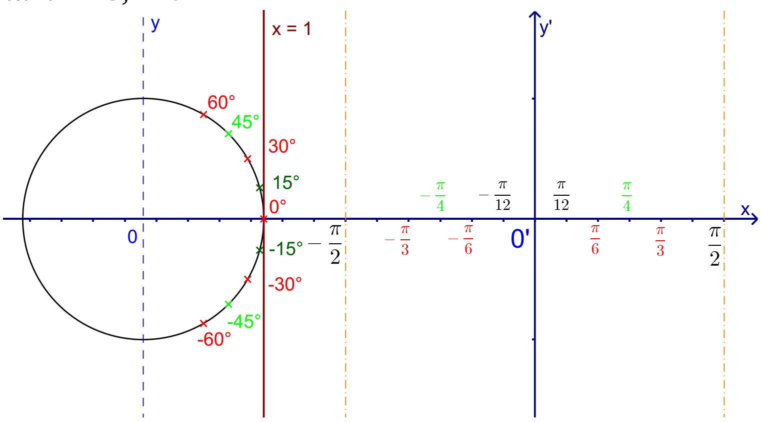
3. a tangens függvény

grafikon „szerkesztése“

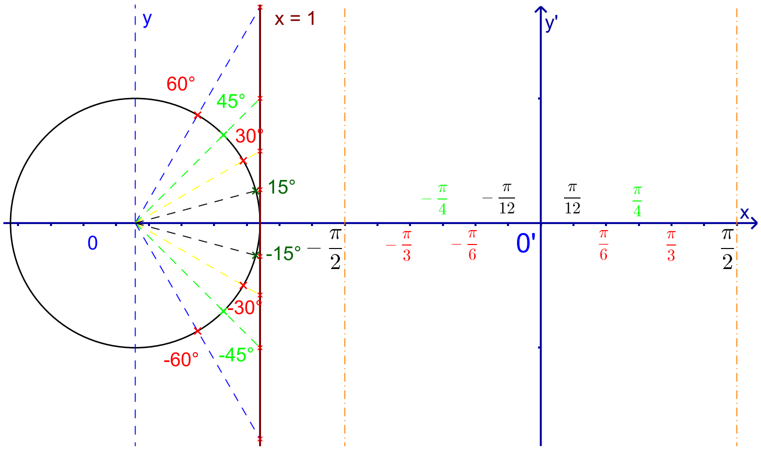
- koordináta-rendszerünkben felveszünk egy egységkört origó középponttal és meghúzzuk az (1; 0) pontbeli érintőjét
- utána felosztjuk körünk jobb felét 30°-onként $\left(\frac{\pi}{6}\ rad\right)$ [-60°-tól 60°-ig] + kijelöljük a síknegyedek (kvadránsok) felezőit
- még két szöget veszünk fel a 15°-ot és a -15°-ot



- ezután felveszünk egy eltolt koordináta-rendszert: az x' tengely azonos az x tengellyel; az y' tengely pedig eltolt – a körtől jobbra (távolabb → *cca* 5-6 *cm*)
- az x tengelyre a szögek ívmértékben kerülnek – az adott szöghöz tartozó ív hossza: r = 2 *cm* esetén a félkör hossza π, amely távolságnak csak a fele kerül az eltolt origótól (0') mindkét irányban (az eltolt y' tengelytől) → π.2:2 = 3,14 *cm*



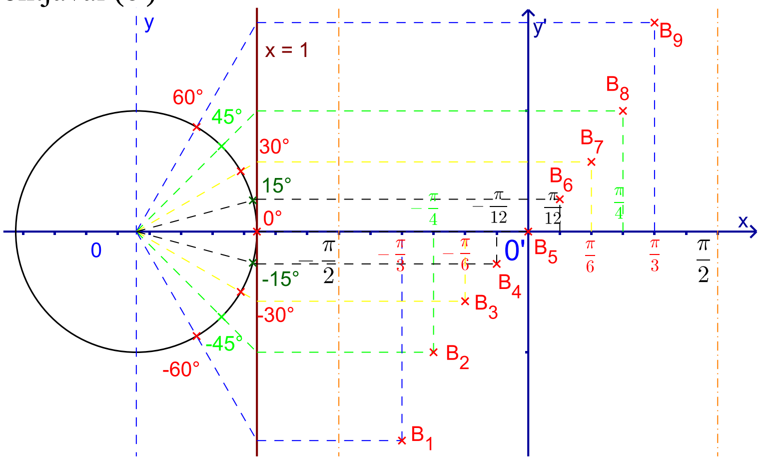
- félegyenesekkel (szakaszokkal) folytatjuk: a 0-ból a félkörön lévő pontokon keresztül az x = 1 érintőig



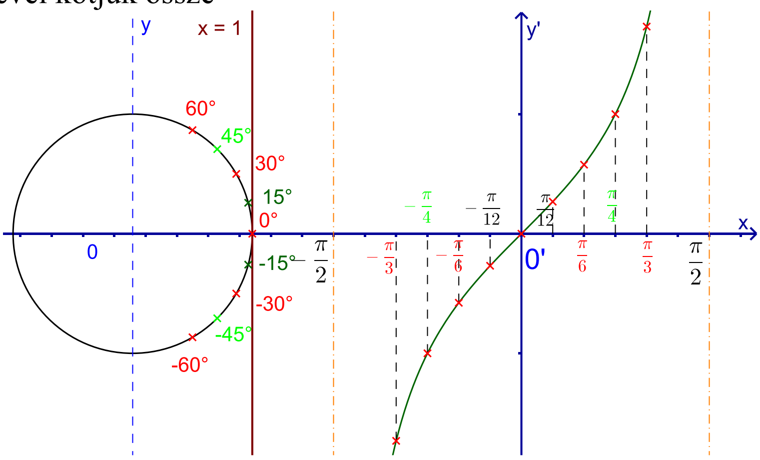
- mivel az x irányított szög tangense az érintőn kapott pont y koordinátája, így az x tengely megfelelő pontjában felvisszük a metszéspont x tengelytől való távolságát (a pontból az x tengellyel párhuzamosan találjuk meg a grafikon pontját)

M. Mivel a 90°-os $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ és a -90°-os $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ irányított szögnél a mozgó szár párhuzamos az érintővel, így nem keletkezik közös pontjuk – egy nem létező pontnak y koordinátája sincs ⇒ a -90°; 90°; 270°; 450°; … szögeknek nincs tangensük → ezek az szögek hiányoznak a függvény értelmezési tartományából

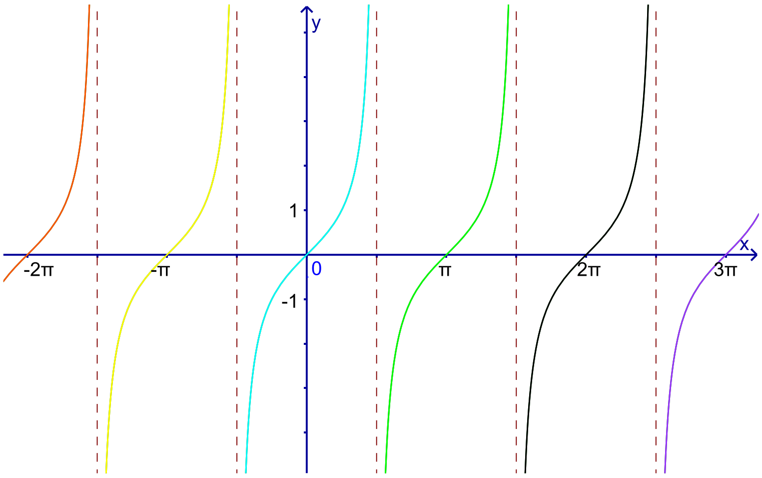
- az ötödik pont a 0°-hoz tartozik – mivel az x tengelyen fekszik, így a B_5 azonos az eltolt koordináta-rendszer kezdőpontjával (0')



- a pontokat görbével kötjük össze



- a tangens függvény sem végződik a 90°-os irányított szögnél – itt is ismétlődnek a függvényértékek és velük a görbe is



tulajdonságok az alapintervallumon

$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k.\pi\right\}$

$H_f = \mathbb{R}$

G. tangens görbe

M. $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ m.↑

Z.H. XY(0; 0)

Sz.É. nincs

Pá. páratlan függvény: tg $(-x) = -$tg x

Pe. periodikus függvény és a periódus hossza: $p = \pi = 180°$

ha a tulajdonságokat kiterjesztjük az egész értelmezési tartományra: $k \in \mathbb{Z}$

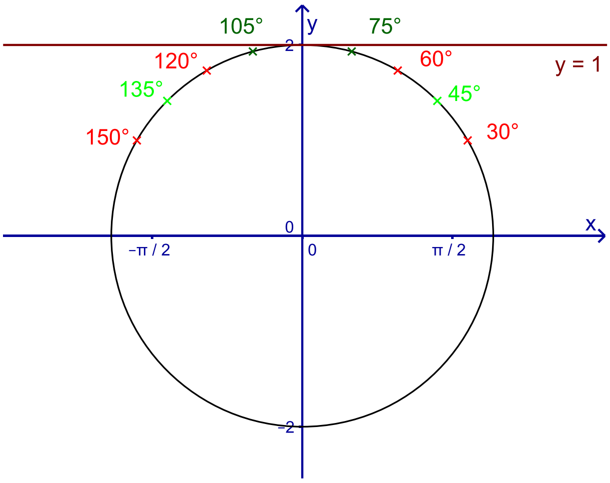
M. $x \in \left(\frac{(2k-1)\pi}{2}; \frac{(2k+1)\pi}{2}\right)$ m.↑

Z.H. $X_k(k.\pi; 0)$

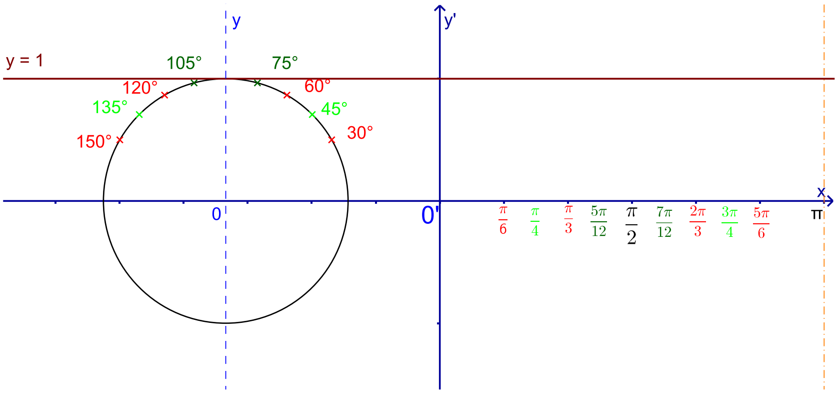
4. a kotangens függvény

grafikon „szerkesztése"

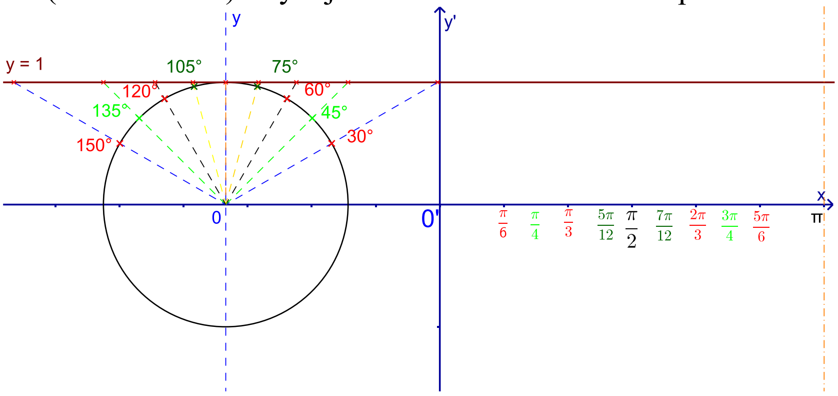
- koordináta-rendszerünkben felveszünk egy egységkört origó középponttal és meghúzzuk a (0; 1) pontbeli érintőjét
- utána felosztjuk körünk felső felét 30°-onként $\left(\frac{\pi}{6}\ rad\right)$ [30°-tól 150°-ig] + kijelüljük a síknegyedek (kvadránsok) felezőit
- még két szöget veszünk fel a 75°-ot és a 105°-ot



- ezután felveszünk egy eltolt koordináta-rendszert: az x' tengely azonos az x tengellyel; az y' tengely pedig eltolt – a körtől jobbra
- az x tengelyre a szögek ívmértékben kerülnek – az adott szöghöz tartozó ív hossza: r = 2 *cm* esetén a félkör hossza π, ez a távolsága az eltolt origótól (0') → π.2 = 6,28 *cm*



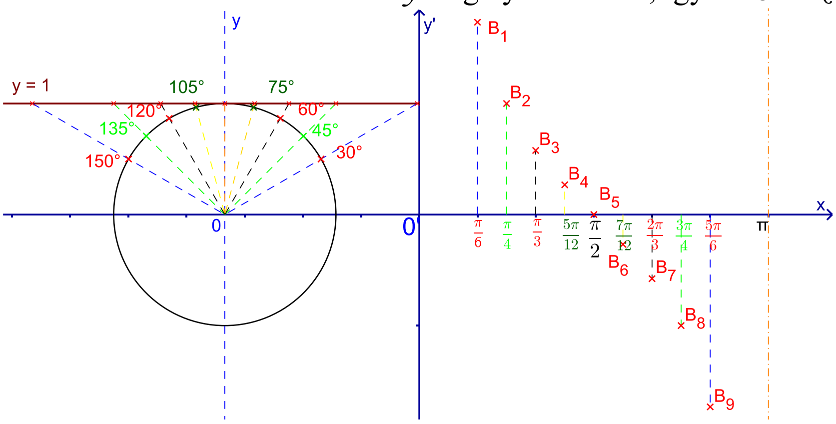
- félegyenesekkel (szakaszokkal) folytatjuk: a 0-ból a félkörön lévő pontokon keresztül az y = 1 érintőig



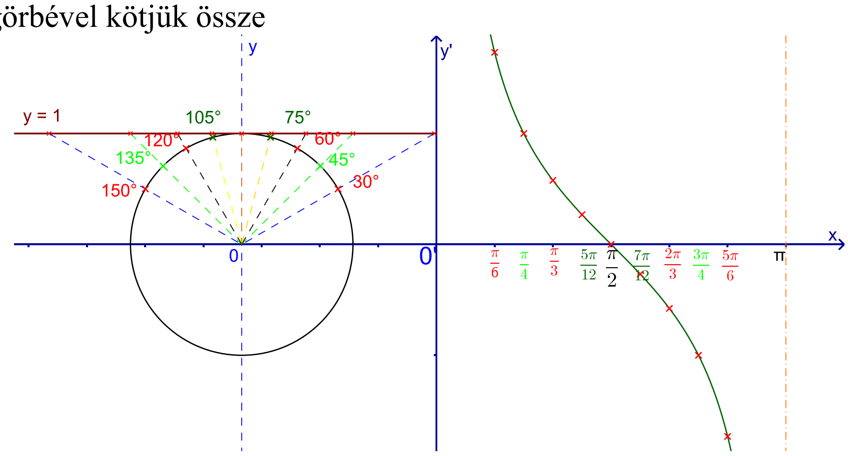
- mivel az x irányított szög kotangense az érintőn kapott pont x koordinátája, így az *x* tengely megfelelő pontjában felvisszük a metszéspont *y* tengelytől való távolságát
  - ha a pont jobbra van az *y* tengelytől (a 30°-75° pontok), akkor az *x* tengely felé kerül (a B_1-B_4)
  - ha a pont balra van az *y* tengelytől (a 105°-150° pontok), akkor az *x* tengely alá kerül (B_6-B_9)

M. Mivel a 0°-os és a 180°-os (π) irányított szögnél a mozgó szár párhuzamos az érintővel, így nem keletkezik közös pontjuk – egy nem létező pontnak x koordinátája sincs ⇒ a 0°; 180°; 360°; 540°; … szögeknek nincs kotangensük → ezek az szögek hiányoznak a függvény értelmezési tartományából

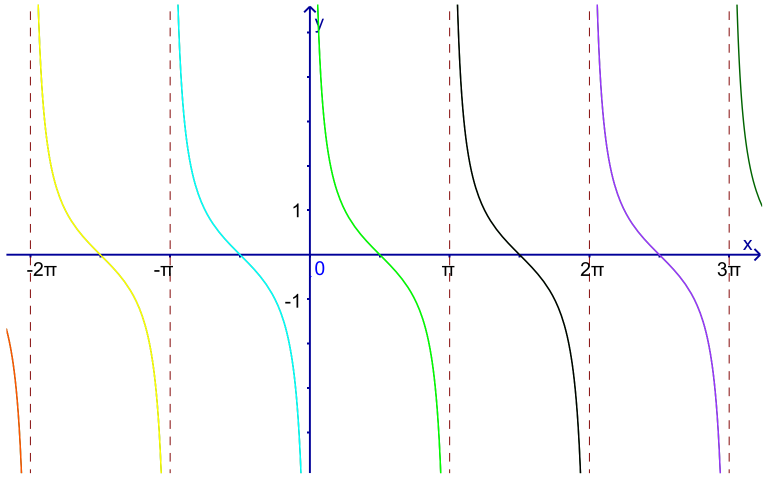
- az ötödik pont a 90°-hoz tartozik – mivel az *y* tengelyen fekszik, így a B_5 az *x* tengelyre kerül



- a pontokat görbével kötjük össze



- a kotangens függvény sem végződik a 180°-os irányított szögnél – itt is ismétlődnek a függvényértékek és velük a görbe is



tulajdonságok az alapintervallumon

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{k.\pi\}$
$H_f = \mathbb{R}$
G. kotangens görbe
M. $(0; \pi)$ m.↓
Z.H. $X_1\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$
Sz.É. nincs
Pá. páratlan függvény: cotg $(-x) = -$cotg x
Pe. periodikus függvény és a periódus hossza: $p = \pi = 180°$

ha a tulajdonságokat kiterjesztjük az egész értelmezési tartományra: $k \in \mathbb{Z}$
M. $x \in (k.\pi; (k + 1)\pi)$ m.↓
Z.H. $X_k\left(\frac{\pi}{2} + k.\pi; 0\right)$