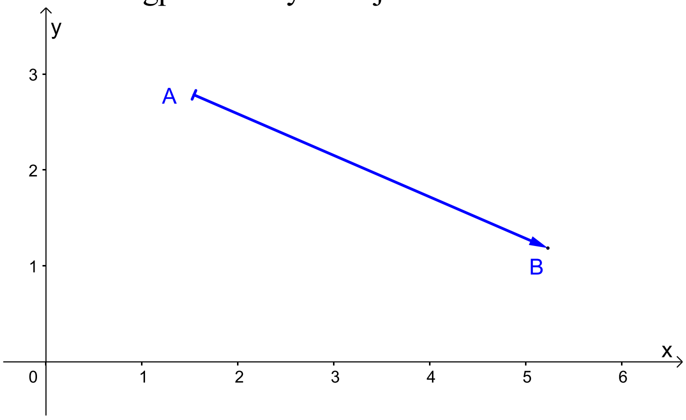
Vektorok
(Vektory)

irányított szakasz (orientovaná úsečka) – két pont adott sorrendben, ahol az elsőt kezdőpontnak a másodikat pedig végpontnak nevezzük

M. Jelölésben az első helyen mindig a kezdőpont a másodikon pedig a végpont szerepel, felettük pedig egy nyíl.

$\overrightarrow{AB}$ – egyéb jelölések: $\overline{AB}$; $\underline{AB}$; *AB*; **AB** (felülvonás; aláhúzás; dőlt; félkövér)

Az irányított szakasz ábrázolásában a végponthoz nyilat rajzolunk.



irányított nullszakasz (nulová orientovaná úsečka) – az irányított szakasz kezdő- és végpontja megegyezik

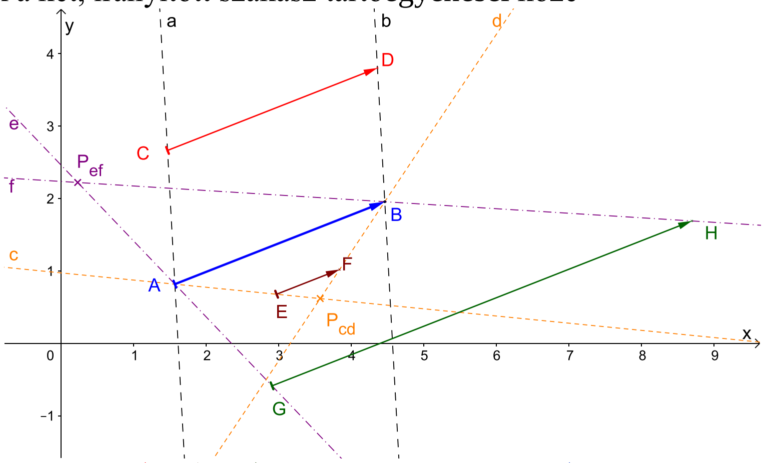
az irányított szakasz hossza (veľkosť orientovanej úsečky) – kezdő- és végpontjának távolsága (megegyezik a „közönséges" szakasz hosszával)

$|\overrightarrow{AB}| = |AB|$

M. Az irányított nullszakasz hossza nulla.

$|\overrightarrow{AA}| = |AA| = 0$

az irányított szakaszok azonos irányúak (csak párhuzamos helyzetnél van értelme) – ha a kezdőpontjaikat és a végpontjaikat összekötő egyenesek vagy párhuzamosak (azonos hosszúságú irányított szakaszoknál), vagy pedig a metszéspontjuk nem esik a két, irányított szakasz tartóegyenesei közé

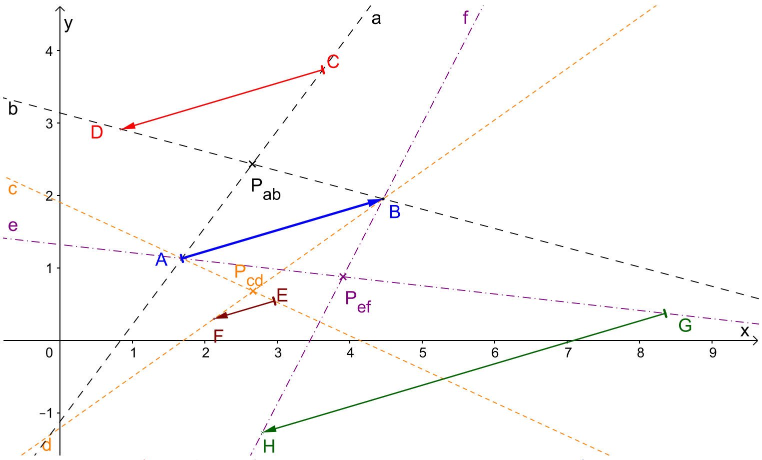


Mindhárom irányított szakasznak: $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{GH}$, azonos az iránya az $\overrightarrow{AB}$ irányított szakaszéval.

Az $\overrightarrow{AB}$ és a $\overrightarrow{CD}$ irányított szakaszok azonos nagyságúak. Az A és a C kezdőpontokat összekötő egyenes (a) és a B és a D végpontokat összekötő egyenes (b) párhuzamos.

Az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{EF}$ irányított szakaszokból a második a rövidebb. Az A és az E kezdőpontokat összekötő egyenes (c) és a B és az F végpontokat összekötő egyenes (d) metszéspontja (P_{cd}) a rövidebb irányított szakasz mögött található (a hosszabb irányított szakasz által meghatározott azon félsíkban, ahol a rövidebb is található).

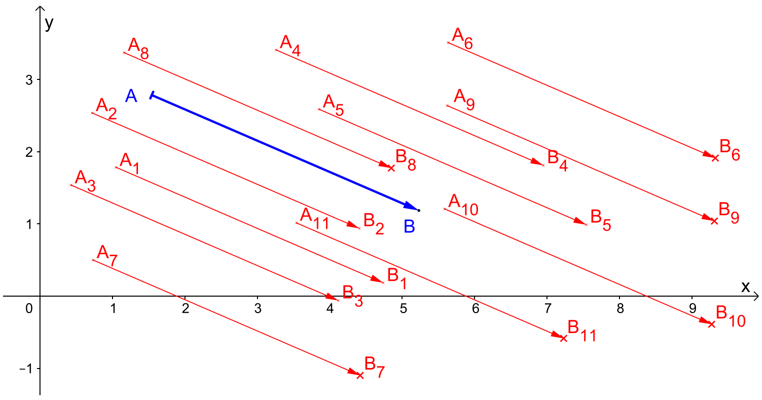
Az $\overrightarrow{AB}$ és a $\overrightarrow{GH}$ irányított szakaszokból a második a hosszabb. Az A és a G kezdőpontokat összekötő egyenes (e) és a B és a H végpontokat összekötő egyenes (f) metszéspontja (P_{ef}) szintén a rövidebb irányított szakasz mögött van.



Mindhárom irányított szakasznak: $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{GH}$, ellentett az iránya az $\overrightarrow{AB}$ irányított szakaszéval. Kezdőpontjaikat összekötő egyenesek (az A pontot a C, E és a G pontokkal – vagyis az a, c és az e egyenesek) és végpontjaikat összekötő egyenesek (a B pontot a D, F és a H pontokkal – vagyis a B, D és az F egyenesek) metszéspontja mindig a két irányított szakasz között található: a P_{ab} az $\overrightarrow{AB}$ és a $\overrightarrow{CD}$ között; a P_{cd} az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{EF}$ között; a P_{ef} pedig az $\overrightarrow{AB}$ és a $\overrightarrow{GH}$ között.

Most pedig képzeljük el, hogy egy irányított szakaszt (kezdőpontját – és ezáltal az egész szakaszt) eltolunk a terünk minden pontjába – ami a síkunk összes pontját jelenti (ki lehet ezt terjeszteni a háromdimenziós térre is). Egy végtelen halmazt kapunk irányított szakaszokból. Ez a végtelen halmaz lesz egyetlen vektor.

D. A ***vektor*** egy irányított szakaszokat tartalmazó végtelen halmaz, melynek minden eleme párhuzamos, azonos hosszúságú és irányú.

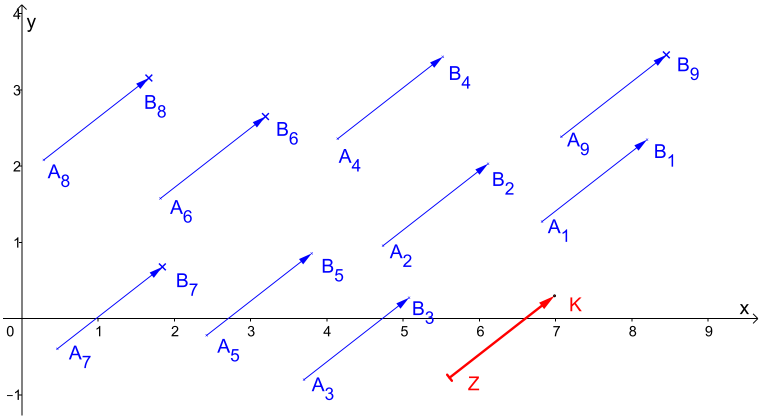


A vektorok jelölésére kis írott betűket használunk nyíllal felül (az esetleges alternatív jelölésmód megegyezik az irányított szakaszoknál felsoroltakkal): $\vec{a}$ ($\bar{a}$; $\underline{a}$; a; $\mathbf{a}$)

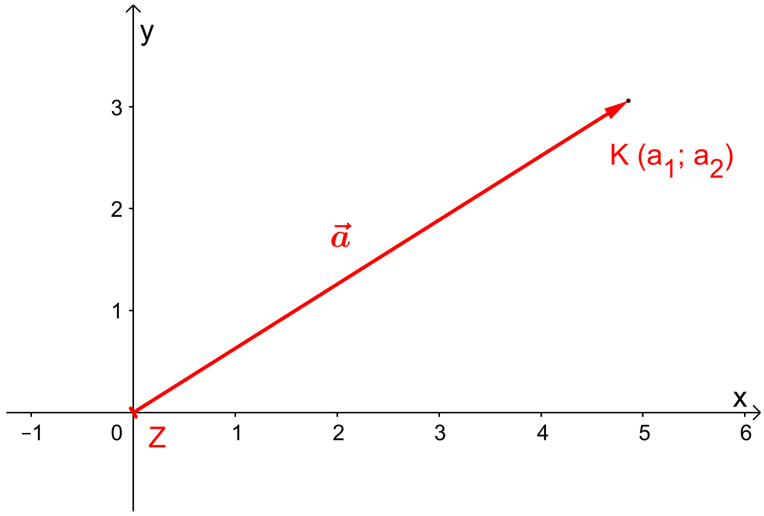
irányított szakasszal adott vektor: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$

M. A vektorokat tekinthetjük egybevágó leképezésnek is, konkrétan eltolásnak. A vektor egy olyan eltolás, mely az irányított szakasz kezdőpontját átviszi a végpontjába. Ha valamely ponthoz „hozzáadunk” egy vektort, akkor megkapjuk az irányított szakasz adott pontbeli reprezentánsának a végpontját.

Ha kiválasztunk egy irányított szakaszt a vektor végtelen halmazából, megkapjuk a vektor egy reprezentánsát (konkrétan: a Z ***pontbeli reprezentánsát*** – ahol a Z az irányított szakasz kezdőpontja). Szintén használatos, hogy a vektor a $\overrightarrow{ZK}$ irányított szakasszal adott.



helyvektor (základné umiestnenie vektora) – origó O(0; 0) kezdőpontú reprezentánsa a vektornak



a vektor koordinátái (súradnice vektora) – helyvektora végpontjának koordinátái

$\vec{a} = \overrightarrow{ZK} = (a_1; a_2)$

M. Térben: $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$

Természetesen kellemetlen lenne, ha vektoraink koordinátáit ezzel a módszerrel kellene mindig meghatároznunk. Vektoraink zömében az őt meghatározó irányított szakasz kezdő- és végpontjának koordinátáival adottak.

T. A vektor koordinátáit megkapjuk, ha végpontjának koordinátáiból kivonjuk kezdőpontjának koordinátáit („végpont mínusz kezdőpont“).

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$; $A = (x_A; y_A)$; $B = (x_B; y_B)$

$\vec{a} = B - A = (x_B; y_B) - (x_A; y_A)$

$\vec{a} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

M. Térben: $\vec{a} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

M. Hasonlóan, mint a szakasz felezőpontjának számításánál (a szakasz végpontjának koordinátáit is számolhattuk vele egy kis átalakítás után), ezen képlet átalakításával kiszámolhatjuk az irányított szakasz kezdő- vagy végpontját.

$\vec{a} = B - A \qquad /+A$

$\vec{a} + A = B$

$\vec{a} = B - A \qquad /+A - \vec{a}$

$A = B - \vec{a}$

Viszont itt is ezen összefüggés alapján külön számoljuk a kezdő- vagy a végpont x koordinátáját az x koordinátákból, y koordinátáját pedig az y-okból.

$A = (x_B - a_1; y_B - a_2)$

$B = (a_1 + x_A; a_2 + y_A)$

M. Térben: $A = (x_B - a_1; y_B - a_2; z_B - a_3)$; $B = (a_1 + x_A; a_2 + y_A; a_3 + z_A)$

T. Két vektor egyenlő, ha irányított szakaszokból álló végtelen halmazaik egyenlők (ugyanazon elemeket tartalmazzák – irányított szakaszokat). Vagyis pontosan akkor, ha megfelelő koordinátáik megegyeznek.

$\vec{a} = \vec{b} \iff (a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2)$

D. Az A ***pont helyvektora*** adott az $\overrightarrow{OA}$ irányított szakasszal, ahol az O az origó.

T. Az A pont helyvektorának koordinátái megegyeznek magának a pontnak a koordinátáival.

$A = (x_A; y_A) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = (x_A; y_A)$

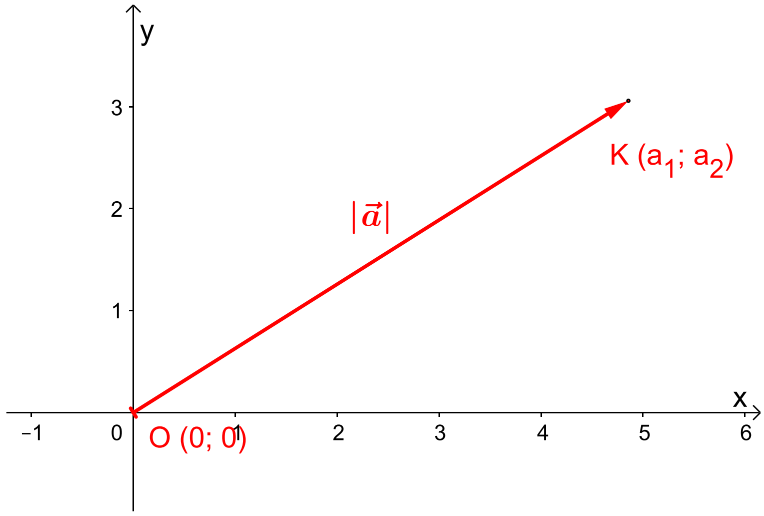
$A = (x_A; y_A; z_A) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = (x_A; y_A; z_A)$

M. A koordinátarendszer pontjait helyettesíthetjük helyvektorokkal.

a vektor nagysága (veľkosť vektora) – tetszőleges reprezentánsának nagysága (az irányított szakasz hossza → pontok távolsága)

A vektor nagyságát abszolút értékkel jelöljük: $|\vec{a}|$

Próbáljuk meg meghatározni a vektor nagyságát. Vegyünk egy helyvektort. Kezdőpontja az origó (O), aminek a koordinátái nullák. Végpontja koordinátái pedig azonosak magának a vektornak a koordinátáival.



Most alkalmazzuk a pontok távolságának kiszámítására szolgáló tételt:

$$|\vec{a}| = |ZK| = \sqrt{(x_K - x_Z)^2 + (y_K - y_Z)^2} = \sqrt{(a_1 - 0)^2 + (a_2 - 0)^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Vagyis a vektor koordinátáinak ismeretében máris kiszámíthatjuk annak hosszát.

T. $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

M. Térben: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

T. $|\vec{a}| \geq 0 \;\wedge\; |\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

$|\lambda\vec{a}| = |\lambda|.|\vec{a}|$

$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ háromszög-egyenlőtlenség

$\left||\vec{a}| - |\vec{b}|\right| \leq |\vec{a} - \vec{b}|$

ellentett vektor (opačný vektor) – a vektorral párhuzamos, azonos nagyságú de ellentett irányú (a halamazokban ellentett irányú de azonos nagyságú irányított szakaszok vannak)

Nagyságuk alapján két különleges vektort ismerünk (különleges nagyságú):

nullvektor (nulový vektor) – nagysága nulla: a halmazban irányított nullszakaszok vannak

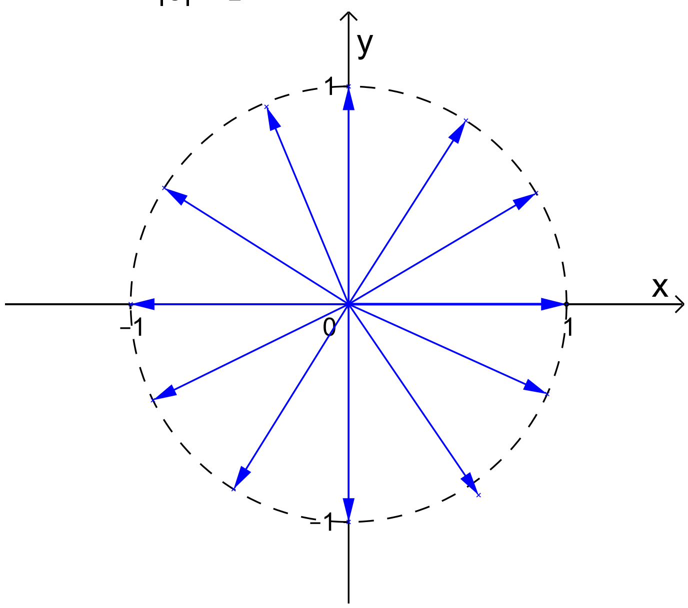
$\vec{0} = (0; 0)$ $|\vec{0}| = 0$

M. A nullvektornak nincs iránya. Ezért bármely más vektorral párhuzamos és egyben merőleges is rá.

Ne keverjük össze a nulla szám és a nullvektor fogalmát. Ezek nem csak hogy nem egyenlők, de össze sem hasonlíthatók (pontosan úgy, ahogy egy másodfokú egyenlet sem hasonlítható össze egy háromszöggel), vagy össze sem vonhatók, mivel két különböző matematikai objektumról van szó. Nem helyettesíthetjük az egyiket a másikkal, és nem is használhatjuk a másik helyett.

egységvektor (jednotkový vektor) – nagysága egy: iránya tetszőleges lehet

$\vec{e}$ vagy $\overrightarrow{a_0}$ $|\vec{e}| = 1$



M. A koordinátarendszer tengelyeinek pozitív irányába mutató egységvektorokat (bázisvektorok) $\vec{i}$; $\vec{j}$ és $\vec{k}$ betűkkel szokás jelölni.

példa:

Adott a $\vec{v}$ vektor a $\overrightarrow{KL}$ irányított szakasszal. Ismertek pontjai: K(12; 17); L(-5; 21). Határozzuk meg a koordinátáit.

$\vec{v} = \overrightarrow{KL} = L - K = (-5 - 12; 21 - 17)$
$\vec{v} = (-17; -4)$

Adott a $\vec{w}(8; -3)$ vektor az $\overrightarrow{MN}$ irányított szakasszal. Adottak pontjai: M(-10; 5); N(x_N; y_N). Határozzuk meg az N pont koordinátáit.

$\vec{w} = \overrightarrow{MN} = N - M = (x_N; y_N) - (-10; 5) = (x_N - (-10); y_N - 5) = (x_N + 10; y_N - 5)$

$(8; -3) = (x_N + 10; y_N - 5) \Leftrightarrow \begin{cases} 8 = x_N + 10 \\ -3 = y_N - 5 \end{cases}$

$x_N = -2$; $y_N = 2$
N(-2; 2)

Adott az ABC háromszög csúcsaival: A(-2; -1); B(8; 3); C(4; 7). Határozzuk meg az alábbi irányított szakaszokkal adott vektorok koordinátáit:

a, $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ b, $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$ c, $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$

$\vec{c} = \overrightarrow{AB} = B - A = (8; 3) - (-2; -1) = (8 - (-2); 3 - (-1))$
$\vec{c} = (10; 4)$

$\vec{b} = \overrightarrow{CA} = A - C = (-2; -1) - (4; 7) = (-2 - 4; -1 - 7)$
$\vec{b} = (-6; -8)$

$\vec{a} = \overrightarrow{CB} = B - C = (8; 3) - (4; 7) = (8 - 4; 3 - 7)$
$\vec{a} = (4; -4)$

Az adott vektorok közül melyik a leghosszabb $\vec{d} = (-3; 4)$; $\vec{e} = (2; -5)$; $\vec{f} = (6; 1)$; $\vec{g} = (-2; -6)$?

$|\vec{d}| = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$

$|\vec{e}| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29} = 5{,}385$

$|\vec{f}| = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{36 + 1} = \sqrt{37} = 6{,}083$

$|\vec{g}| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 6{,}325$

Határozzuk meg a $\vec{h}(-35; h_2)$ vektor hiányzó koordinátáját, ha $|\vec{h}| = 37$.

$|\vec{h}| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = \sqrt{(-35)^2 + h_2^2} = \sqrt{1\,225 + h_2^2}$

$37 = \sqrt{1\,225 + h_2^2}$ $/()^2$
$1\,369 = 1\,225 + h_2^2$ $/-1\,225$
$144 = h_2^2$ $/\sqrt{}$
$12 = |h_2|$
$h_2 = 12$ $h_2' = -12$