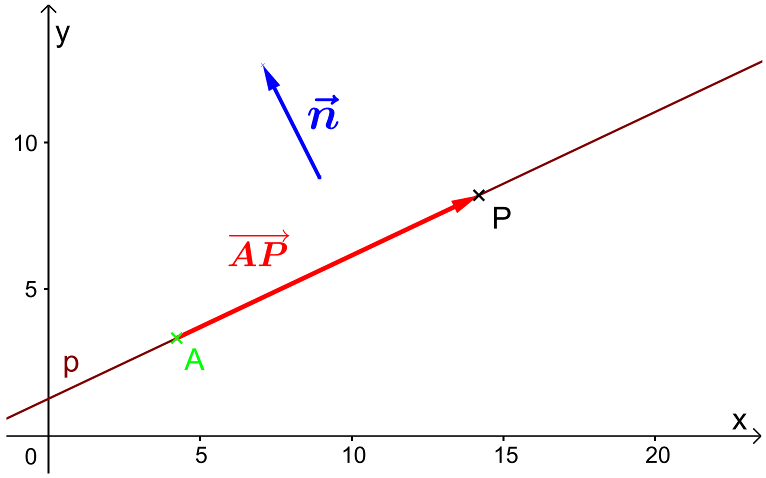
Az egyenes általános egyenlete
(Všeobecná rovnica priamky)

Ahhoz, hogy egy egyenes általános egyenletét felíhassuk, ismernünk kell az egyenes normálvektorát és az egyenes egy pontját.

Adott a p egyenes $\overrightarrow{n_p}$ normálvektorával és A pontjával:

$\overrightarrow{n_p}$ $(n_1; n_2)$, $A(x_0; y_0)$

Ábrázoljuk egyenesünket a koordinátarendszerben. Vegyünk fel egy további pontot az egyenesen – egy általános P(x; y) pontot.



Felhasználva a vektorok merőlegességét – pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha skaláris szorzatuk nullával egyenlő. Felírjuk az $\overrightarrow{AP}$ és az $\overrightarrow{n_p}$ vektorok skaláris szorzatát:

kiszámítjuk az $\overrightarrow{AP}$ vektor koordinátáit – végpont mínusz kezdőpont:

$\overrightarrow{AP} = P - A = (x; y) - (x_0; y_0) = (x - x_0; y - y_0)$

felírjuk a skaláris szorzatot, és rendezzük:

$\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{n_p} = (x - x_0; y - y_0).(n_1; n_2) = (x - x_0).n_1 + (y - y_0).n_2 = x.n_1 - x_0.n_1 + y.n_2 - y_0.n_2 =$

$= n_1.x + n_2.y - n_1.x_0 - n_2.y_0$

az n_1; n_2; x_0; y_0 adottak, ismert értékek → az utolsó két tag két szám

jelöljük ezen két szám összegét c-vel

$c = - n_1.x_0 - n_2.y_0$

behelyettesítve a skaláris szorzatba:

$\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{n_p} = n_1.x + n_2.y + c$

mivel két vektor merőlegessége ezen szorzat nulla értékénél áll fenn → így megkapjuk a p egyenes általános egyenletét

A p egyenes általános egyenlete az alábbi alakú:

$p: n_1.x + n_2.y + c = 0$ $\qquad$ $c \in \mathbb{R}$

ahol a c konstans értékét az egyenes egy ismert pontjának behelyettesítésével számoljuk ki

$c = - n_1.x_0 - n_2.y_0$

M. A geometriai alakzatok általános egyenlete (egyenes, kör, ellipszis, …) egy adott alakkal rendelkezik. Úgy kell őket rendezni, hogy az egyenlet redukált alakot öltsön (vagyis az egyik oldalon csak a nulla maradjon), ne tartalmazzon törtet és zárójelet sem.

példa:

Adott egy egyenes $\vec{n}$ normálvektorával és egy pontjával. Írjuk fel az egyenes általános egyenletét!

a, a: $\overrightarrow{n_a} = (-2; 4)$; $A = (-1; 3)$ $\qquad$ b, b: $\overrightarrow{n_b} = (3; -5)$; $B = (-1; 2)$

c, c: $\overrightarrow{n_c} = (0; 3)$; $C = (10; -4)$ $\qquad$ d, d: $\overrightarrow{n_d} = (1; 0)$; $D = (7; 6)$

felírjuk az általános egyenlet előzetes alakját

a: $-2.x + 4.y + c = 0$

a hiányzó konstans értékét az adott pont behelyettesítésével számoljuk ki

$-2.(-1) + 4.3 + c = 0$
$2 + 12 + c = 0$
$14 + c = 0$ /-14
$c = -14$
a: $-2x + 4y - 14 = 0$

b: $3.x - 5.y + c = 0$
$3.(-1) - 5.2 + c = 0$
$-3 - 10 + c = 0$
$-13 + c = 0$ /+13
$c = 13$
b: $3x - 5y + 13 = 0$

c: $0.x + 3.y + c = 0$
$0.10 + 3.(-4) + c = 0$
$-12 + c = 0$ /+12
$c = 12$
c: $3y + 12 = 0$

d: $1.x + 0.y + c = 0$
$1.7 + 0.6 + c = 0$
$7 + c = 0$ /-7
$c = -7$
d: $x - 7 = 0$

Adott egy egyenes két pontjával. Írjuk fel az általános egyenletét!

a, a: A(3; -4), B(6; 2)
b, b: C(-2; -8), D(5; 1)
c, c: E(9; 7), F(-2; 5)
d, d: G(8; 3), H(-3; -7)

$\vec{s_a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3; 6) \sim (1; 2)$
$\vec{n_a} \perp \vec{s_a} \Rightarrow \vec{n_a} = (2; -1)$
felírjuk az általános egyenlet előzetes alakját
a: $2.x - 1.y + c = 0$
behelyettesítjük a két adott pont valamelyikét
$2.3 - 1.(-4) + c = 0$
$6 + 4 + c = 0$
$10 + c = 0$ /-10
$c = -10$
kipróbáljuk a másik pontot is
$2.6 - 1.2 + c = 0$
$12 - 2 + c = 0$
$10 + c = 0$ /-10
$c = -10$
M. Az egyenes egy tetszőleges pontját behelyettesítve mindig ugyanazt az értéket kapjuk a c konstansra.
a: $2x - y - 10 = 0$

$\vec{s_b} = \overrightarrow{CD} = D - C = (7; 9)$
$\vec{n_b} \perp \vec{s_b} \Rightarrow \vec{n_b} = (9; -7)$
b: $9.x - 7.y + c = 0$
$9.5 - 7.1 + c = 0$
$45 - 7 + c = 0$
$38 + c = 0$ /-38
$c = -38$
b: $9x - 7y - 38 = 0$

$\vec{s_c} = \overrightarrow{EF} = F - E = (-11; -2)$
$\vec{n_c} \perp \vec{s_c} \Rightarrow \vec{n_c} = (2; -11)$
c: $2.x - 11.y + c = 0$
$2.(-2) - 11.5 + c = 0$

$-4 - 55 + c = 0$

$-59 + c = 0 \qquad /+59$

$c = 59$

c: $2x - 11y + 59 = 0$

$\overrightarrow{s_d} = \overrightarrow{GH} = H - G = (-11; -10)$

$\overrightarrow{n_d} \perp \overrightarrow{s_d} \Rightarrow \overrightarrow{n_d} = (10; -11)$

d: $10.x - 11.y + c = 0$

$10.8 - 11.3 + c = 0$

$80 - 33 + c = 0$

$47 + c = 0 \qquad /-47$

$c = -47$

d: $10x - 11y - 47 = 0$

Adott egy egyenes általános egyenletével. Határozzuk meg az egyenes normálvektorát és egy pontját!

a, a: $5x + 4y - 10 = 0$ b, b: $2x - 7y + 1 = 0$

c, c: $-3x - 5 = 0$ d, d: $2y - 6 = 0$

$\overrightarrow{n_a} = (5; 4)$

az egyenes egy pontját úgy határozzuk meg, hogy az egyik koordinátáját mi választjuk meg, a másikat pedig az egyenletbe történő behelyettesítéssel számoljuk ki

természetesen kis egész számot választunk: 0; 1; -1; 2; -2

$A \in a \rightarrow A(2; y_A)$

$5.2 + 4.y_A - 10 = 0$

$10 + 4y_A - 10 = 0$

$4y_A = 0 \qquad /:4$

$y_A = 0$

A(2; 0)

$\overrightarrow{n_b} = (2; -7)$

$B \in b \rightarrow B(x_B; 1)$

$2.x_B - 7.1 + 1 = 0$

$2x_B - 7 + 1 = 0$

$2x_B - 6 = 0 \qquad /+6$

$2x_B = 6 \qquad /:2$

$x_B = 3$

B(3; 1)

$\overrightarrow{n_c} = (-3; 0)$

$C \in c \rightarrow C(x_C; 1)$

$-3.x_C - 5 = 0 \qquad /+5$

$-3x_C = 5 \qquad /:(-3)$

$x_C = -\frac{5}{3}$

$C\left(-\frac{5}{3}; 1\right)$

M. Ha a C pont x koordinátáját választottuk volna, akkor hamis állítást kaptunk volna:

$C(1; y_C)$

$-3.1 - 5 = 0$

$-3 - 5 = 0$

$-8 \neq 0$

Ez azt jelenti, hogy ilyen x koordinátájú pont nem létezik az egyenesen.

M. Az olyan egyenleteknél, ahol az egyik koordináta hiányzik (az egyenletből hiányzik az x vagy az y), csak a meglévő koordinátát választhatjuk meg → a másik adott az egyenlettel. Ezek különleges helyzetű egyenesek: párhuzamosak az x vagy az y tengellyel.

$\overrightarrow{n_d} = (0; 2)$

$D \in d \rightarrow d(1; y_D)$

$2.y_D - 6 = 0 \qquad /+6$

$$2y_D = 6 \quad /:2$$
$$y_D = 3$$

D(1; 3)

Adott az e egyenes általános egyenletével. Az alábbi pontok közül melyek illeszkednek az egyeneshez?

e: $4x - 3y + 2 = 0$

A(-2; -2) B(1; 2) C(0; 3) D(4; 6) E(-1; 1)

a pont koordinátáit behelyettesítjük az egyenletbe → ha fennáll az egyenlőség, akkor rajta fekszik

$$4.(-2) - 3.(-2) + 2 = 0$$
$$-8 + 6 + 2 = 0$$
$$0 = 0 \Rightarrow A \in e$$

$$4.1 - 3.2 + 2 = 0$$
$$4 - 6 + 2 = 0$$
$$0 = 0 \Rightarrow B \in e$$

$$4.0 - 3.3 + 2 = 0$$
$$0 - 9 + 2 = 0$$
$$-7 \neq 0 \Rightarrow C \notin e$$

$$4.4 - 3.6 + 2 = 0$$
$$16 - 18 + 2 = 0$$
$$0 = 0 \Rightarrow D \in e$$

$$4.(-1) - 3.1 + 2 = 0$$
$$-4 - 3 + 2 = 0$$
$$-5 \neq 0 \Rightarrow E \notin e$$

Határozzuk meg a pont hiányzó koordinátáját úgy, hogy illeszkedjen az egyeneshez!

a, A(x_A; 2), a: $x - 2y + 5 = 0$ b, B(x_B; -5), b: $-3x + 4y + 2 = 0$

c, C(11; y_C), c: $-2x + 5y - 3 = 0$ d, D(7; y_D), c: $5x - 9y - 8 = 0$

az adott koordinátát behelyettesítjük az egyenletbe → a hiányzót kiszámítjuk

$$x_A - 2.2 + 5 = 0$$
$$x_A - 4 + 5 = 0$$
$$x_A + 1 = 0 \quad /-1$$
$$x_A = -1$$

A(-1; 2)

$$-3.x_B + 4.(-5) + 2 = 0$$
$$-3x_B - 20 + 2 = 0$$
$$-3x_B - 18 = 0 \quad /+18$$
$$-3x_B = 18 \quad /:(-3)$$
$$x_B = -6$$

B(-6; -5)

$$-2.11 + 5.y_C - 3 = 0$$
$$-22 + 5y_C - 3 = 0$$
$$-25 + 5y_C = 0 \quad /+25$$
$$5y_C = 25 \quad /:5$$
$$y_C = 5$$

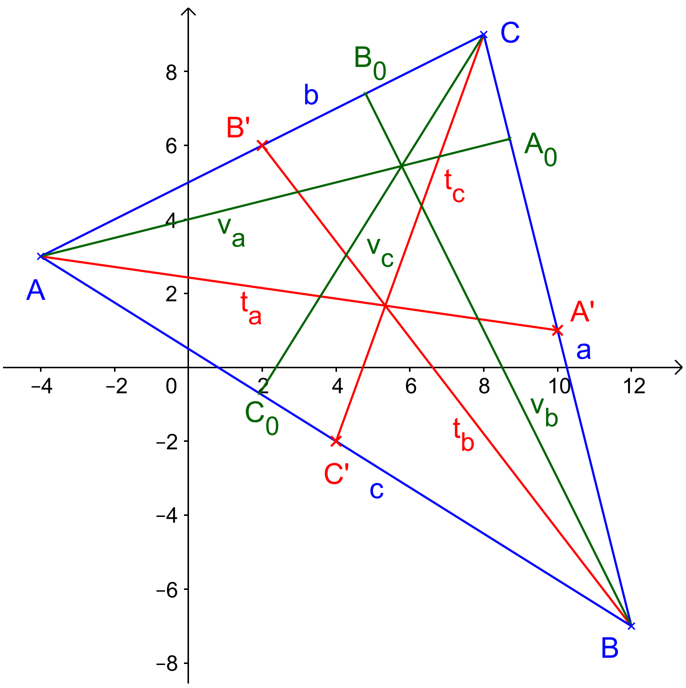
C(11; 5)

$$5.7 - 9.y_D - 8 = 0$$
$$35 - 9y_D - 8 = 0$$
$$27 - 9y_D = 0 \quad /-27$$
$$-9y_D = -27 \quad /:(-9)$$
$$y_D = 3$$

D(7; 3)

Adott az ABC háromszög. Írjuk fel oldalai, súlyvonalai és magasságvonalai általános egyenletét!

A(-4; 3), B(12; -7), C(8; 9)



a: BC

$\vec{s_a} = \overrightarrow{BC} = C - B = (-4; 16) \sim (-1; 4)$

$\vec{n_a} \perp \vec{s_a} \Rightarrow \vec{n_a} = (4; 1)$

a: 4.x + 1.y + c = 0

C ∈ a

4.8 + 1.9 + c = 0

32 + 9 + c = 0

41 + c = 0 /-41

c = -41

a: 4x + y – 41 = 0

b: AC

$\vec{s_b} = \overrightarrow{AC} = C - A = (12; 6) \sim (2; 1)$

$\vec{n_b} \perp \vec{s_b} \Rightarrow \vec{n_b} = (1; -2)$

b: 1.x – 2.y + c = 0

A ∈ b

1.(-4) – 2.3 + c = 0

-4 – 6 + c = 0

-10 + c = 0 /+10

c = 10

b: x – 2y + 10 = 0

c: AB

$\vec{s_c} = \overrightarrow{AB} = B - A = (16; -10) \sim (8; -5)$

$\vec{n_c} \perp \vec{s_c} \Rightarrow \vec{n_c} = (5; 8)$

c: 5.x + 8.y + c = 0

A ∈ c

5.(-4) + 8.3 + c = 0

-20 + 24 + c = 0

4 + c = 0 /-4

c = -4

c: 5x + 8y – 4 = 0

t_a: AA'

$A' = \frac{B+C}{2} = (10;\ 1)$

$\overrightarrow{s_{t_a}} = \overrightarrow{AA'} = A' - A = (14;\ -2) \sim (7;\ -1)$

$\overrightarrow{n_{t_a}} \perp \overrightarrow{s_{t_a}} \Rightarrow \overrightarrow{n_{t_a}} = (1;\ 7)$

t_a: 1.x + 7.y + c = 0

$A \in t_a$

1.(-4) + 7.3 + c = 0

-4 + 21 + c = 0

17 + c = 0 /-17

c = -17

t_a: x + 7y – 17 = 0

t_b: BB'

$B' = \frac{A+C}{2} = (2;\ 6)$

$\overrightarrow{s_{t_b}} = \overrightarrow{BB'} = B' - B = (-10;\ 13)$

$\overrightarrow{n_{t_b}} \perp \overrightarrow{s_{t_b}} \Rightarrow \overrightarrow{n_{t_b}} = (13;\ 10)$

t_b: 13.x + 10.y + c = 0

$B' \in t_b$

13.2 + 10.6 + c = 0

26 + 60 + c = 0

86 + c = 0 /-86

c = -86

t_b: 13x + 10y – 86 = 0

t_c: CC'

$C' = \frac{A+B}{2} = (4;\ -2)$

$\overrightarrow{s_{t_c}} = \overrightarrow{CC'} = C' - C = (-4;\ -11)$

$\overrightarrow{n_{t_c}} \perp \overrightarrow{s_{t_c}} \Rightarrow \overrightarrow{n_{t_c}} = (11;\ -4)$

t_c: 11.x – 4.y + c = 0

$C' \in t_c$

11.4 – 4.(-2) + c = 0

44 + 8 + c = 0

52 + c = 0 /-52

c = -52

t_c: 11x – 4y – 52 = 0

v_a: AA_0

$\overrightarrow{n_{v_a}} \perp \overrightarrow{n_a} \Rightarrow \overrightarrow{n_{v_a}} = (1;\ -4)$

v_a: 1.x – 4.y + c = 0

$A \in v_a$

1.(-4) – 4.3 + c = 0

-4 – 12 + c = 0

-16 + c = 0 /+16

c = 16

v_a: x – 4y + 16 = 0

v_b: BB_0

$\overrightarrow{n_{v_b}} \perp \overrightarrow{n_b} \Rightarrow \overrightarrow{n_{v_b}} = (2;\ 1)$

v_b: 2.x + 1.y + c = 0

$B \in v_b$

2.12 + 1.(-7) + c = 0

24 – 7 + c = 0

17 + c = 0 /-17

c = -17

v_b: 2x + y – 17 = 0

v_c: CC_0

$\overrightarrow{n_{v_c}} \perp \overrightarrow{n_c} \Rightarrow \overrightarrow{n_{v_c}} = (8; -5)$

v_c: $8.x – 5.y + c = 0$

$C \in v_c$

$8.8 – 5.9 + c = 0$

$64 – 45 + c = 0$

$19 + c = 0$ /-19

$c = -19$

v_c: $8x – 5y – 19 = 0$

Írjuk fel az adott ponton áthaladó, adott egyenessel párhuzamos egyenes általános egyenletét:

a, A(5; 6), a: $2x – 3y + 12 = 0$ b, B(3; -1), b: $8x + 5y – 7 = 0$

- párhuzamos egyenesek normálvektorai is párhuzamosak ⇒ lehetnek azonosak is
- így a párhuzamos egyenesek általános egyenletei különbözhetnek csak a c konstansban – az x és az y együtthatói (a normálvektor koordinátái) maradhatnak
- különbözhetnek az normálvektorban is (az együtthatókban) – az egyik normálvektor a másik számszorosa

r_a: $2x – 3y + c = 0$

$2.5 – 3.6 + c = 0$

$10 – 18 + c = 0$

$-8 + c = 0$ /+8

$c = 8$

r_a: $2x – 3y + 8 = 0$

r_b: $8x + 5y + c = 0$

$8.3 + 5.(-1) + c = 0$

$24 – 5 + c = 0$

$19 + c = 0$ /-19

$c = -19$

r_b: $8x + 5y – 19 = 0$

Írjuk fel az adott ponton áthaladó, adott egyenesre merőleges egyenes általános egyenletét:

a, C(4; 3), c: $6x – 4y – 5 = 0$ b, D(-5; 7), d: $3x + 9y – 2 = 0$

- merőleges egyenesek normálvektorai is merőlegesek

$\overrightarrow{n_c} = (6; -4)$

$\overrightarrow{n_{k_c}} \perp \overrightarrow{n_c} \Rightarrow \overrightarrow{n_{k_c}} = (4; 6) \sim (2; 3)$

k_c: $2x + 3y + c = 0$

$2.4 + 3.3 + c = 0$

$8 + 9 + c = 0$

$17 + c = 0$ /-17

$c = -17$

k_c: $2x + 3y – 17 = 0$

$\overrightarrow{n_d} = (3; 9)$

$\overrightarrow{n_{k_d}} \perp \overrightarrow{n_d} \Rightarrow \overrightarrow{n_{k_d}} = (9; -3) \sim (3; -1)$

k_d: $3x – 1y + c = 0$

$3.(-5) – 1.7 + c = 0$

$-15 – 7 + c = 0$

$-22 + c = 0$ /+22

$c = 22$

k_d: $3x – y + 22 = 0$