

Egybevágó leképezések – izometria (Zhodné zobrazenia)

Euklideszi szerkesztések (*Euklidovské konštrukcie*) – szerkesztések egyélű vonalzó (nem karcolatos derékszögű) és körző segítségével

- összeköthetünk két különböző pontot egy egyenessel
- két pont távolságát körzőnyílásba vehetünk
- egy pont köré adott sugárral kört rajzolhatunk (egy másik ponthoz illeszkedő kört, vagy egy ismert távolságot – szakaszhosszat – felhasználva sugárként)
- meghatározhatjuk két egyenes metszéspontját (amennyiben létezik)
- meghatározhatjuk egy egyenes és egy kör metszéspontját/metszéspontjait (amennyiben létezik)
- meghatározhatjuk két kör metszéspontját/metszéspontjait (amennyiben létezik)

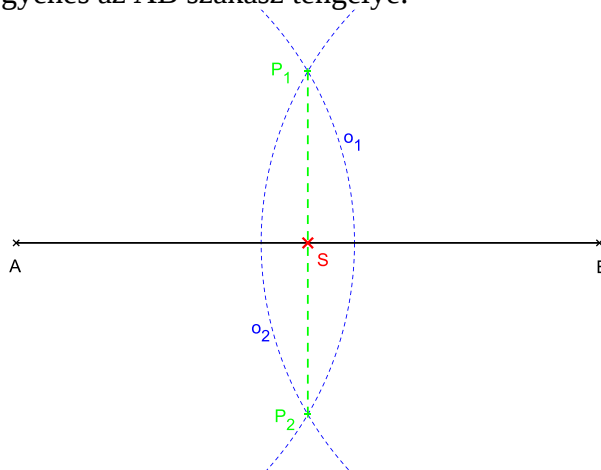
ezen lépések segítségével megszerkeszthők az alábbi objektumok

- a szakasz felezőpontja (közepe)
- a szög tengelye
- egy adott egyenesre merőleges az egyenes egy ismert pontjában vagy egy külső pontból → ugyanez a feladat a szakasz felezőpontjában a szakasz tengelyét eredményezi
- egy adott egyenessel párhuzamos egy adott ponton keresztül
- szögmásolás

A szakasz felezőpontjának szerkesztése

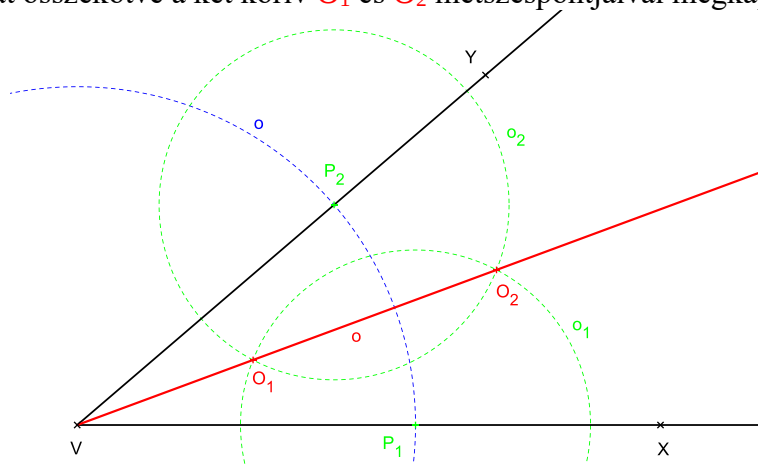
- az adott AB szakasz mindkét végpontjában azonos sugárral o_1 és o_2 köríveket húzunk – a sugaruk nagyobb kell legyen a szakasz felénél, különben nem metszik egymást
- a körívek P_1 és P_2 metszéspontjait összekötjük
- az egyenes és az összekötő szakasz metszéspontja a keresett **S** felezőpont

M. (mint Megjegyzés) A P_1P_2 egyenes az AB szakasz tengelye.



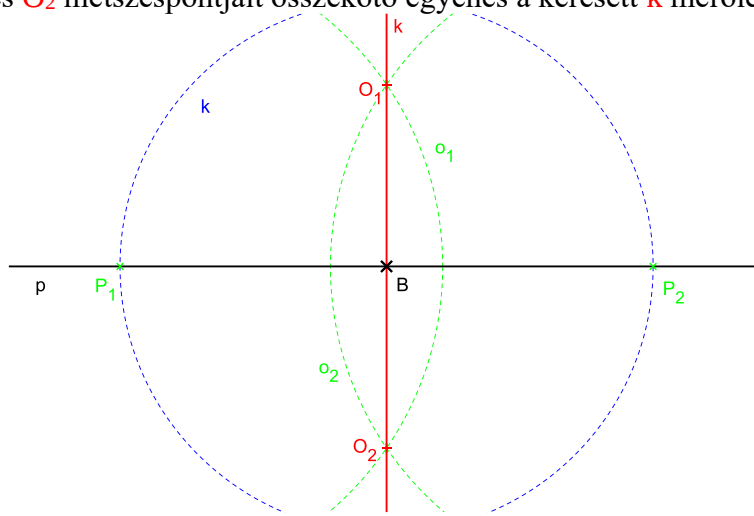
A szög tengelyének szerkesztése

- a szög V csúcsában egy tetszőleges sugárú o körívet húzunk – úgy, hogy messe a szögszárakat
- a körív és a szögszárak P_1 és P_2 metszéspontjai köré újabb két o_1 és o_2 íveket húzunk azonos sugárral – ismét a sugarat úgy választjuk, hogy legyen metszéspontjuk
- a szög V csúcsát összekötve a két körív O_1 és O_2 metszéspontjaival megkapjuk a keresett o tengelyt



Egyenesre merőleges szerkesztése egy adott pontban

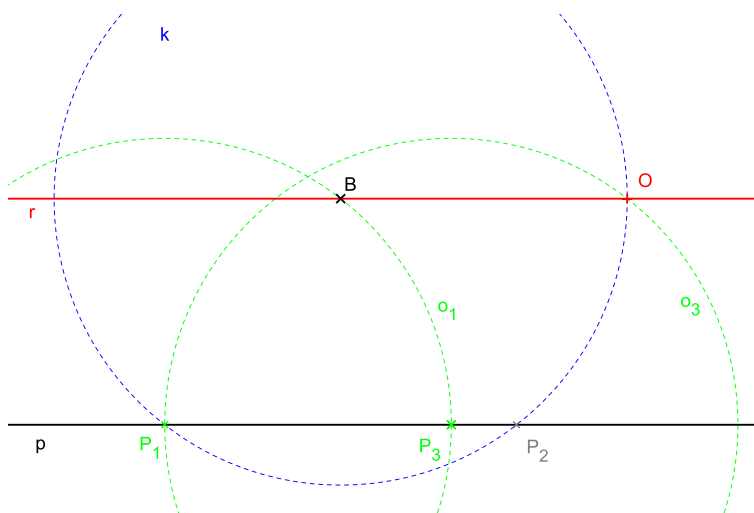
- az adott B pont köré egy tetszőleges sugarú k kört rajzolunk (amennyiben a B pont nem illeszkedik az egyenesre, olyan sugarat választunk, hogy legyen közös pontja az egyenessel)
- a kör és az egyenes P_1 és P_2 metszéspontjaiban újabb O_1 és O_2 köríveket rajzolunk azonos sugárral ügyelve arra, hogy messék egymást
- a két körív O_1 és O_2 metszéspontjait összekötő egyenes a keresett k merőleges



Adott ponton áthaladó párhuzamos egyenes szerkesztése

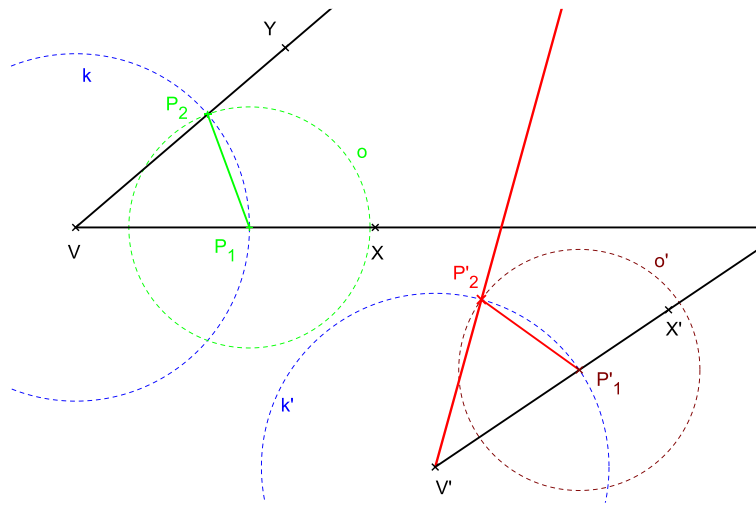
- szerkeszthetnénk két merőleges segítségével is (az adott egyenesre bárhol merőlegest bocsájtani, majd ezen merőlegesre az adott pontból újabb merőlegest) – de mi más, rövidebb módszert alkalmazunk
- egy tetszőleges sugarú k kört rajzolunk a B pont köré úgy, hogy messe az egyenesünket
- kiválasztjuk a két metszéspontból az egyiket: P_1 -et vagy P_2 -t (én az előbbi választottam), amely köré ugyanolyan sugárral, mint a B pont köré, újabb O_1 kört rajzolunk
- ezen O_1 kör egyik metszéspontja az adott egyenesünkkel a P_3 pont, mely köré ismét egy O_3 kört rajzolunk az eredeti sugárral
- így megkapjuk az O pontot, mint az O_3 és a k körök metszéspontját (a másik metszéspontjuk természetesen a P_1 pont)
- végül összekötve az O pontot az adott B pontunkkal, megkapjuk a keresett r párhuzamos egyenest

M. Tulajdonképpen egy BP_1P_3O rombuszt szerkesztettünk, felhasználva azon tulajdonságát, hogy szemközti oldalai párhuzamosak (és minden oldala egybevágó – ez tulajdonképpen a közös sugar a rajzolt k körnél és a további köríveknél).



Adott szöggel egybevágó szög szerkesztése – szögmásolás

- a szög V csúcsa köré egy tetszőleges sugarú k körívet húzunk úgy, hogy messe a szög szárait
- ugyanezen sugárral egy k' körívet rajzolunk a V' pont köré – ez a P'_1 pontban metszi a $\overrightarrow{V'X'}$ félegyenest
- ezek után vegyük körzőnyílásba a k körív és szögünk VX illetve VY szögszárai metszéspontjainak távolságát – vagyis a P_1P_2 távolságot
- ezen távolsággal mint sugárral rajzoljunk egy o' körívet a P'_1 pont köré
- a k' és az o' körívek metszéspontja az a P'_2 pont, mely a lemásolt szögünk $V'P'_2$ szára



D. Egy leképezést **egybevágó leképezésnek** mondunk, ha bármely két pont és azok képeinek távolsága egyenlő.

$$\forall A, B: Z(A) = A' \wedge Z(B) = B' \Rightarrow |AB| = |A'B'|$$

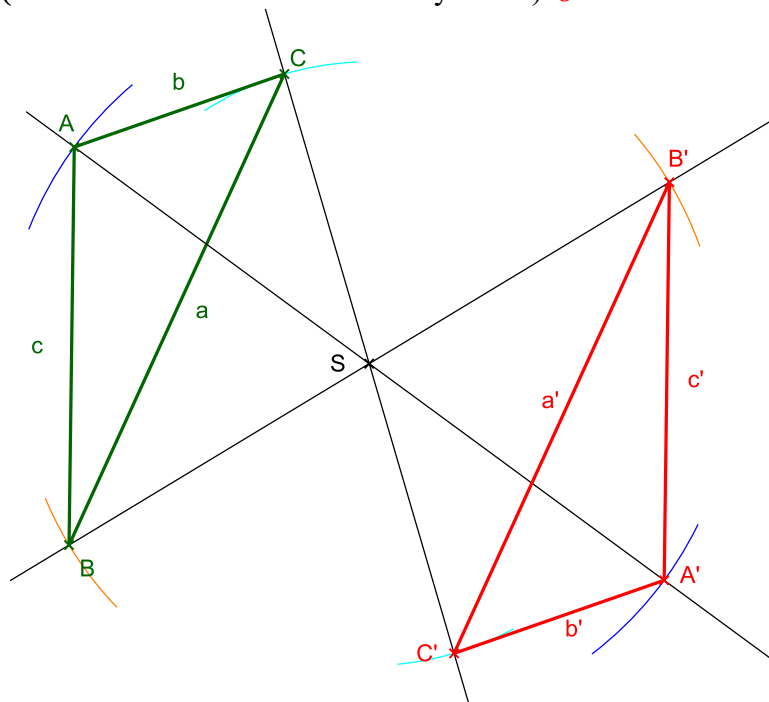
T. Mivel az egybevágó leképezés távolságtartó, ezért szögtartó is.

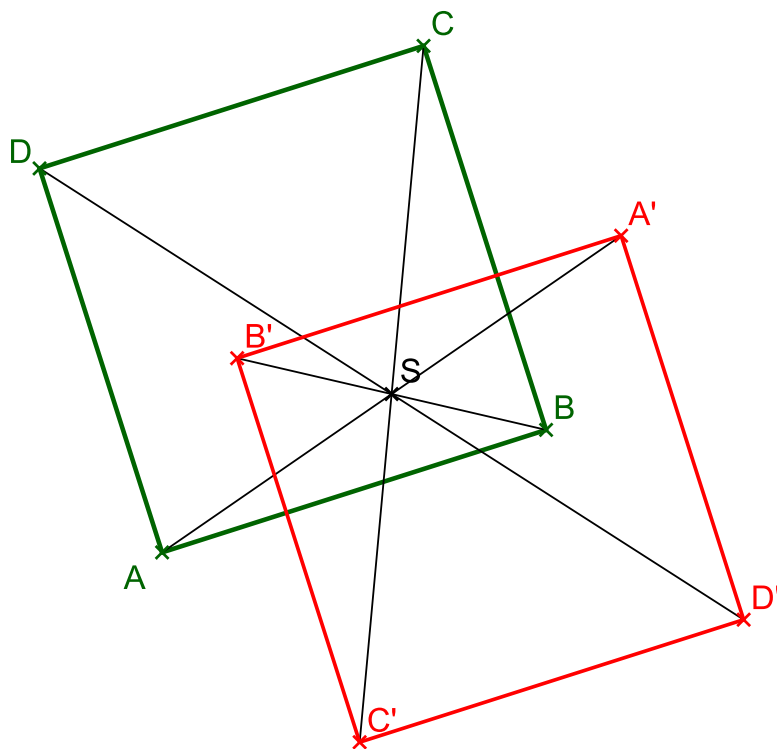
1. **Identikus leképezés – identitás** (identické zobrazenie) **J**

$$a, \forall A: J(A) = A$$

a leképezésben minden pont invariáns

2. **Középpontos tükrözés** (stredová súmernosť – centrálna symetria) **S**





a, $\exists! S: \mathcal{J}(S) = S$

b, $\forall A: \mathcal{J}(A) = A' \Rightarrow S \in AA'$

c, $\forall A: \mathcal{J}(A) = A' \Rightarrow |AS| = |SA'|$

d, $\forall A: A \neq S \Rightarrow A \neq A'$

S (a tükrözés középpontja) az egyetlen invariáns pont

S illeszkedik az őst és képét összekötő egyeneshez

az őst és képe azonos távolságra van S-től

az őst és képe az S pont szerinti ellentett félegyenesen vannak

$\forall A, B: \mathcal{J}(A) = A' \wedge \mathcal{J}(B) = B' \Rightarrow AB \parallel A'B'$

egy szakasz és képe mindig párhuzamosak

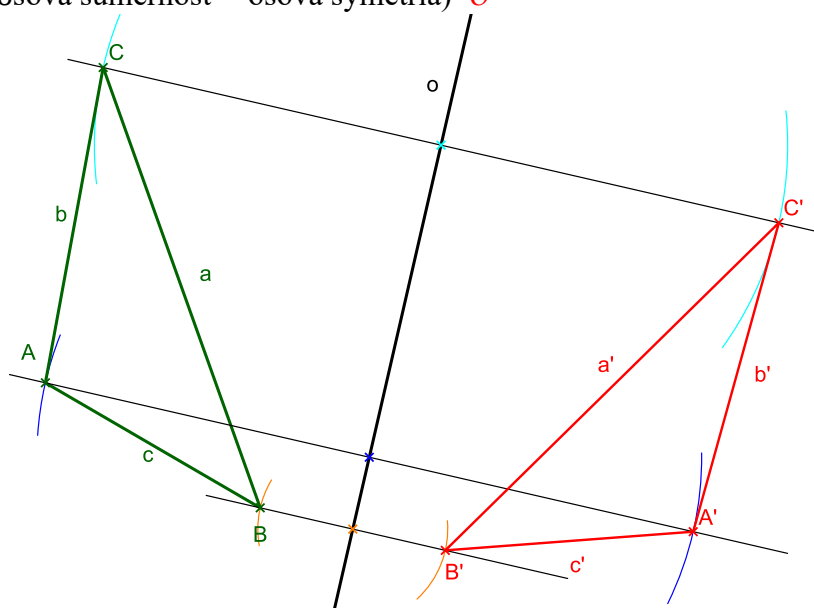
$\forall A: \mathcal{J}(\mathcal{J}(A)) = A$

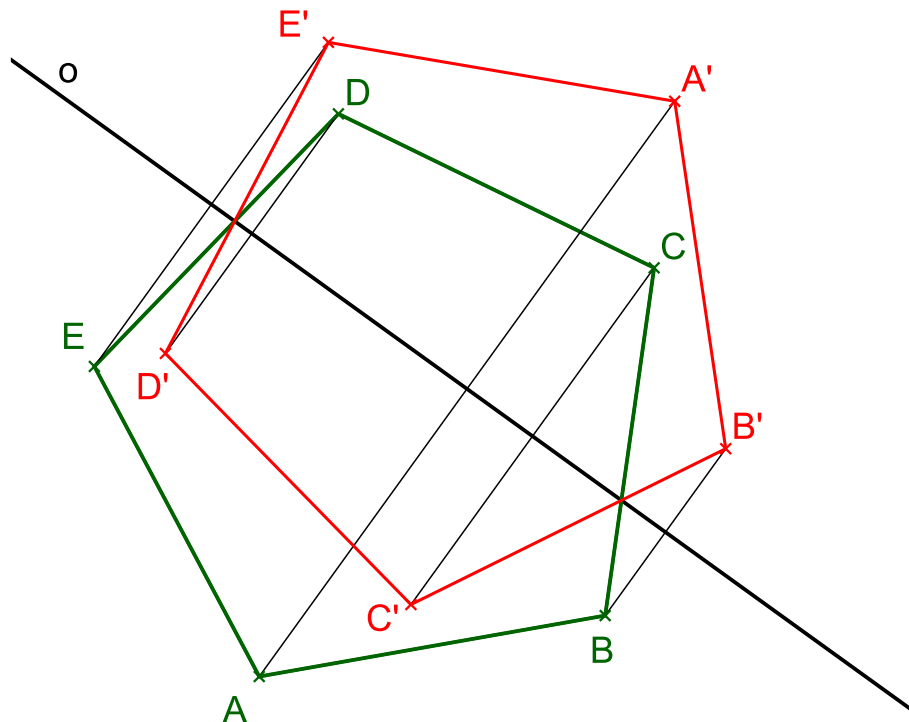
involúció – a kép képe maga az őst

megőrzi a forgatási irányt (irányítástartó) – az ABC és az A'B'C' azonos forgást mutatnak (az óramutató járásával egyezőt $\cup$ vagy ellentett $\cap$)

I.A. (invariáns alakzatok): S-re illeszkedő egyenesek, S középpontú körök, S középpontú négyzetek, ...

3. Tengelyes tükrözés (osová sümernost' – osová symetria) O





a, $\exists ! o: \forall A \in o \Rightarrow O(A) = A$

b, $\forall A: O(A) = A' \Rightarrow AA' \perp o$

c, $\forall A: O(A) = A' \Rightarrow |Ao| = |A'o|$

d, $\forall A: A \notin o \Rightarrow A \neq A'$

a tengely (o) minden pontja invariáns

a tengely merőleges az őst és képét összekötő egyenesre

az őst és képe azonos távolságra van a tengelytől

az őst és képe a tengely szerinti ellentett félsíkokban vannak

$\forall A, B: O(A) = A' \wedge O(B) = B' \Rightarrow AB \cap A'B' \in o$ egyenes és képe a tengelyen metszik egymást

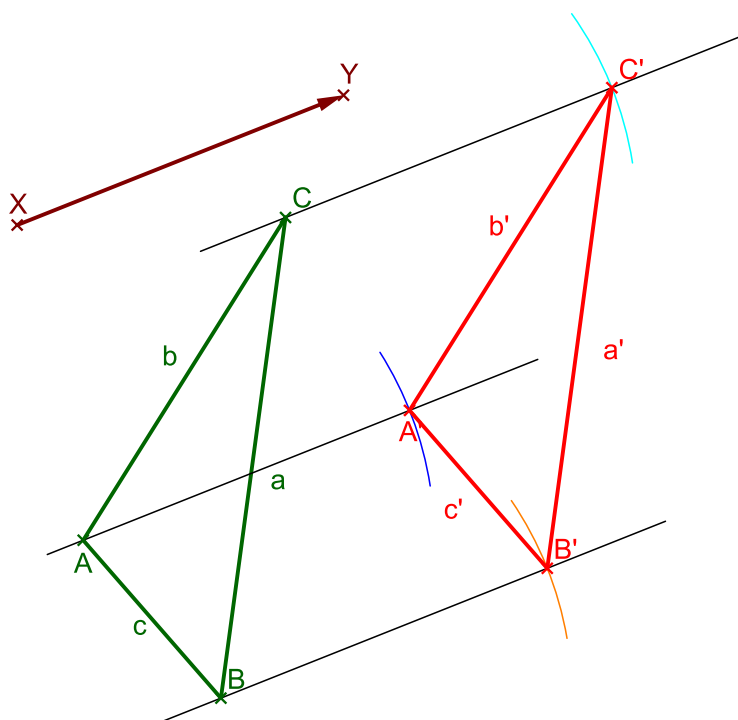
$\forall A: O(O(A)) = A$

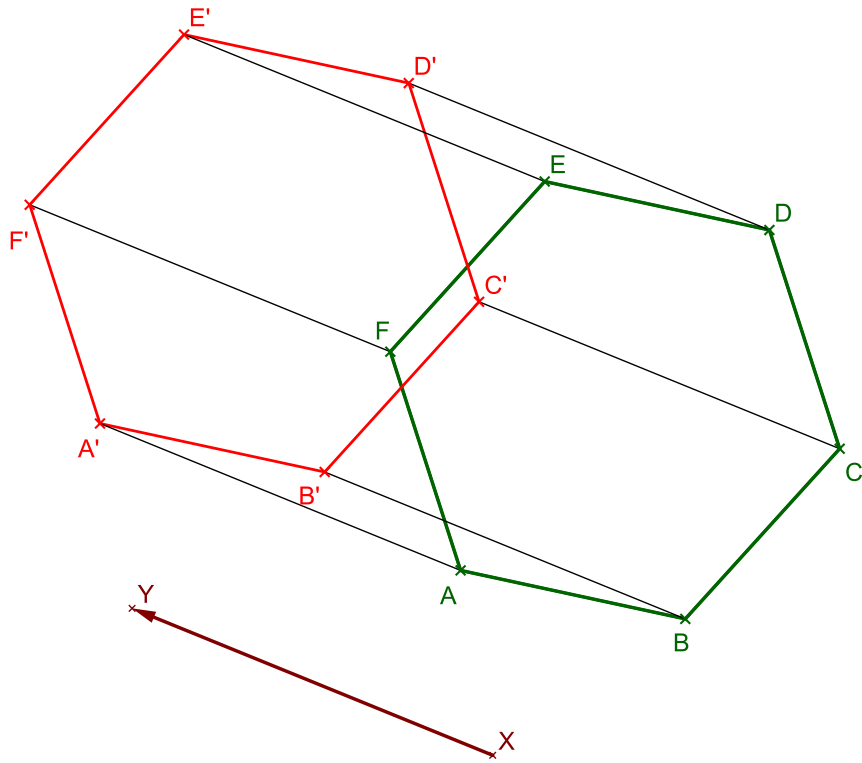
involúció – a kép képe maga az őst

nem irányítástartó – az ABC és az A'B'C' ellentett forgás

I.A.: a tengelyre merőleges egyenesek, körök középpontjaikkal a tengelyen, négyzet átlójával a tengelyen, ...

4. Eltolás – transláció (posúvanie – translácia) $\mathcal{T}$





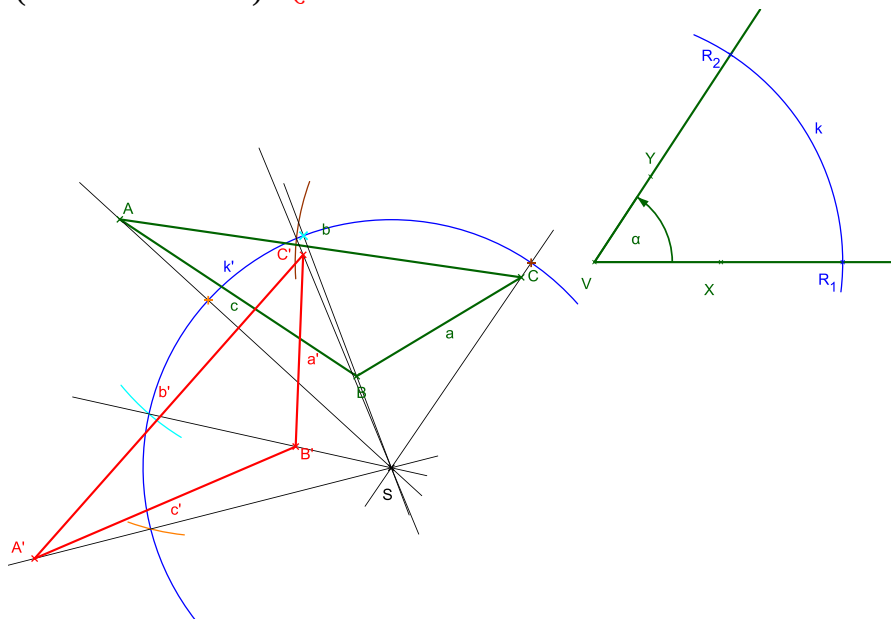
- a, $\forall A, B: \pi(A) = A' \wedge \pi(B) = B' \Rightarrow AA' \parallel BB'$
az ősöket képeikkel összekötő szakaszok párhuzamosak
- b, $\forall A, B: \pi(A) = A' \wedge \pi(B) = B' \Rightarrow |AA'| = |BB'|$
az ősök és képek azonos távolságban vannak
- c, $\forall A, B: \pi(A) = A' \wedge \pi(B) = B' \Rightarrow AB \parallel A'B'$
minden kép azonos irányban van eltolva

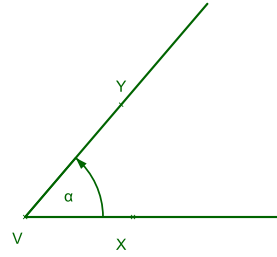
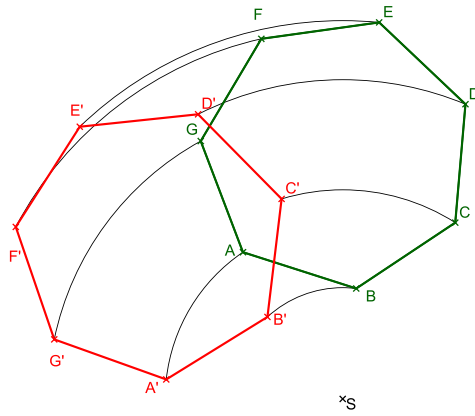
$\forall A, B: \pi(A) = A' \wedge \pi(B) = B' \Rightarrow AB \parallel A'B'$ egy szakasz és képe mindig párhuzamosak
irányítástartó – az ABC és az A'B'C' egyező forgás

nincs invariáns pontja

I.A.: egyedül az eltolással párhuzamos egyenesek

5. Forgatás – rotáció (otáčanie – rotácia) $\mathcal{R}$





a, $\exists! S: \mathcal{R}(S) = S$

S (a forgatás középpontja) az egyetlen invariáns pont

b, $\forall A, B: \mathcal{R}(A) = A' \wedge \mathcal{R}(B) = B' \Rightarrow |\angle ASA'| = |\angle BSB'|$

az ős-középpont-kép mindig azonos szöget zárnak be

c, $\forall A: \mathcal{R}(A) = A' \Rightarrow |AS| = |A'S|$

az ős és képe azonos távolságra van a középponttól

d, $\forall A, B: \mathcal{R}(A) = A' \wedge \mathcal{R}(B) = B' \Rightarrow |\angle ASB| = |\angle A'SB'|$

minden kép azonos irányban van elforgatva

irányítástartó – az ABC és az $A'B'C'$ egyező forgás

I.A.: csak az S középpontú körök forgathatók bármilyen szöggel, speciális szöggel – az S középpontú szabályos sokszögeknél (négyzetet: $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$; szabályos ötszöget: $72^\circ, 144^\circ, 216^\circ, 288^\circ, \dots$)