

Törtkifejezések – algebrai törtek (Lomené výrazy)

D. A *törtkifejezés* legalább egy nevezőben ismeretlent tartalmaz.

pl.: $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3x-1}; \frac{x-2}{4} + \frac{5}{x+4} - \frac{x^2-2x+6}{4x-3}; \frac{xy+y^2}{x^3-xy}$ – ezek algebrai törtek

de: $\frac{x}{3}; \frac{3x+2}{5}; \frac{5}{7}xy^3$ – nem törtkifejezések

M. Mivel nullával nem lehet osztani, ezért be kell biztosítanunk, hogy a nevezőbe ne kerülhessen nulla. Ezért a törtkifejezés bármilyen jellegű átalakítása előtt elsőként feltételeket kell szabnunk, hogy mikor van értelme az adott kifejezésnek.

- minden nevező, mely ismeretlent (ismeretleneket) tartalmaz nem lehet egyenő nullával
- ezután igyekezünk ezekből kifejezni az ismeretlent, hogy mely érték nem lehet (néha ez lehetetlen → például ha a kifejezésünk fokszáma nagyobb 2-nél)
- ha nevezőnk több ismeretlent tartalmaz, akkor kiválasztunk közülük egyet, amit a többi segítségével fejezünk ki

Természetesen a törtkifejezések átalakításaihoz több, az általános iskolában tanult összefüggésre (tételre) van szükségünk.

M. Mindegyik tétel mindkét irányból használható.

T.

a, **tört bővítése** (rozšírenie zlomku) $\leftrightarrow$ tört egyszerűsítése (zjednodušenie/krátenie zlomku)

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}; \forall c \neq 0$$

b, **törték összege és különbsége** (súčet a rozdiel zlomkov) $\leftrightarrow$ tört felbontása két törtbe (rozloženie zlomku do dvoch zlomkov)

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$$

c, **tört szorzása számmal** (násobenie zlomku s číslom)

$$c \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot c = \frac{ca}{b}$$

d, **törték szorzata** (súčin zlomkov)

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

e, **törték hányadosa** (podiel zlomkov)

$$c : \frac{a}{b} = c \cdot \frac{b}{a} = \frac{cb}{a}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Ha **törteket** akarunk **összeadni** vagy **kivonni**, meg kell keresnünk a törtkifejezések közös nevezőjét.

közös nevező (spoločný menovateľ) – tulajdonképpen a nevezők legkisebb közös többszöröse

legkisebb közös többszörős (najmenší spoločný násobok) – az a legalacsonyabb fokszámú kifejezés, mely osztható mindegyik kifejezéssel

- ahhoz, hogy minél egyszerűbben találjuk meg a közös nevezőt, a nevezőkben szereplő kifejezéseket úgynevezett irreducibilis polinomok szorzatára bontjuk (**irreducibilis polinom** – tovább nem bontható alacsonyabb fokszámú polinomok szorzatára)

» minden lineáris kifejezés (belőlük legfeljebb szám emelhető ki): $ax + b$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$

» másodfokú kifejezések, melyekből képzett másodfokú egyenleteknek (úgy, hogy a kifejezést egyenlővé tesszük nullával) nincs valós megoldása: $ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

- szorzattá bontani kiemeléssel illetve képlet alkalmazásával tudunk

példa:

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x^2+3x} - \frac{2x-1}{3x^2+9x} + \frac{5}{x} &= \frac{x+2}{x(x+3)} - \frac{2x-1}{3x(x+3)} + \frac{5}{x} = & x \neq 0 \\ & x+3 \neq 0 \rightarrow x \neq -3 \\ & = \frac{(x+2) \cdot 3 - (2x-1) + 5 \cdot 3(x+3)}{3x(x+3)} = \frac{3x+6-2x+1+15x+45}{3x(x+3)} = \frac{16x+52}{3x(x+3)} \end{aligned}$$

$$\frac{3x+1}{x^2-2x-15} - \frac{x+4}{x^2-7x+10} = \frac{3x+1}{(x+3)(x-5)} - \frac{x+4}{(x-5)(x-2)} =$$

$$x+3 \neq 0 \rightarrow x \neq -3$$

$$x-5 \neq 0 \rightarrow x \neq 5$$

$$x-2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2$$

$$= \frac{(3x+1)(x-2) - (x+4)(x+3)}{(x+3)(x-5)(x-2)} = \frac{3x^2-6x+x-2 - (x^2+3x+4x+12)}{(x+3)(x-5)(x-2)} = \frac{3x^2-5x-2-x^2-7x-12}{(x+3)(x-5)(x-2)} = \frac{2x^2-12x-14}{(x+3)(x-5)(x-2)}$$

Ha egy **törtet számmal** vagy **kifejezéssel szorzunk** (a szám/kifejezés állhat a tört előtt vagy után), akkor ez a szám/kifejezés **csak a számlálót szorozza**.

példa:

$$7 \cdot \frac{4x+3}{x+5} = \frac{4x+3}{x+5} \cdot 7 = \frac{7(4x+3)}{x+5} = \frac{28x+21}{x+5}$$

$$x+5 \neq 0 \rightarrow x \neq -5$$

$$(2x-5) \cdot \frac{x+2}{3x-1} = \frac{x+2}{3x-1} \cdot (2x-5) = \frac{(2x-5)(x+2)}{3x-1} =$$

$$= \frac{2x^2+4x-5x-10}{3x-1} = \frac{2x^2-x-10}{3x-1}$$

$$3x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{1}{3}$$

Törtek szorzásánál a számlálót a számlálóval a nevezőt pedig a nevezővel szorozzuk össze. Természetesen beszorzás előtt igyekszünk egyszerűsíteni a kifejezéseket, amennyiben lehetséges.

példa:

$$\frac{4x^2y^3}{3a^3b^8} \cdot \frac{27a^5b^2}{32x^3y^6} = \frac{1}{b^6} \cdot \frac{9a^2}{8b^6xy^3} = \frac{9a^2}{8b^6xy^3}$$

$$a, b, x, y \neq 0$$

$$\frac{x-5}{x+1} \cdot \frac{3x+2}{x-2} = \frac{(x-5)(3x+2)}{(x+1)(x-2)} = \frac{3x^2+2x-15x-10}{x^2-2x+x-2} =$$

$$= \frac{3x^2-13x-10}{x^2-x-2}$$

$$x+1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1; x-2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2$$

Törtek osztásánál az első tényezőt (az első törtkifejezés) szorozzuk a második tört reciprokával. Ha osztásunk emeletes tört (zložený zlomok) alakjában van, akkor a számlálóban szereplő törtet szorozzuk a nevezőbeli tört reciprokával (másképpen megfogalmazva: a kütagok szorzatát osztjuk a beltagok szorzatával).

M. Ne felejtsük, hogy a törttel való osztásnál az osztóként szereplő tört sem lehet egyenlő nullával. Ezzel ki kell bővítenünk feltételeinket. Ezt elegendő akkor megtennünk, mikor az osztásból szorzást készítünk, és így egy új nevezőjű törtkifejezés jelenik meg.

példa:

$$\frac{32x^3}{9y^8} : \frac{4xy^3}{81x^2z} = \frac{32x^3}{9y^8} \cdot \frac{81x^2z}{4xy^3} = \frac{8x^3}{y^8} \cdot \frac{9xz}{y^3} = \frac{72x^4z}{y^{11}}$$

$$x, y, z \neq 0$$

$$\frac{b-1+\frac{6}{b-6}}{b-2+\frac{3}{b-6}} = \frac{\frac{(b-1)(b-6)+6}{b-6}}{\frac{(b-2)(b-6)+3}{b-6}} = \frac{\frac{b^2-6b-b+6+6}{b-6}}{\frac{b^2-6b-2b+12+3}{b-6}} = \frac{\frac{b^2-7b+12}{b-6}}{\frac{b^2-8b+15}{b-6}} =$$

$$= \frac{b^2-7b+12}{b-6} \cdot \frac{b-6}{b^2-8b+15} = \frac{(b-3)(b-4)}{b-6} \cdot \frac{b-6}{(b-3)(b-5)} =$$

$$= \frac{b-4}{b-5}$$

$$b-6 \neq 0 \rightarrow b \neq 6$$

$$b^2-8b+15 \neq 0 \rightarrow b \neq 3; b \neq 5$$

Egyszerűsítsétek az adott törtet, és határozzátok meg, mikor van értelmük!

$$a, \frac{8ax}{12ay}; \quad b, \frac{12x^2yz}{18x^2y^3z}; \quad c, \frac{ax+bx}{ax-bx};$$

$$d, \frac{180xy^2z^3}{15x^3y^2z^2}; \quad e, \frac{36m^2n^3r}{9m^3r^3}.$$

Adjátok össze a törtet, majd egyszerűsítsétek az eredményt!

$$a, \frac{x-y}{a-y} - \frac{x+y}{y-a} + \frac{2}{a^2-y^2}; \quad b, \frac{2x+1}{x^2-2x} - \frac{1}{x^2-4}.$$

Számítsátok ki, és írjátok fel, mikor van az adott törtnek értelme!

$$a, \left(\frac{1}{a+1} - \frac{2a}{a^2-1}\right) \left(\frac{1}{a} - 1\right); \quad b, \left(\frac{x-1}{x-2} - \frac{x}{x-1}\right) \left(x - \frac{3x}{x+1}\right); \quad c, \frac{x^2+xy}{x^2+y^2} \left(\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}\right);$$

$$d, \frac{x^2-c^2}{x+y} \cdot \frac{x^2-y^2}{xc+c^2} \left(x + \frac{xc}{x-c}\right); \quad e, \frac{m^4-n^4}{m^2-2mn+n^2} \cdot \frac{m-n}{m^2+mn}.$$

Egyszerűsítsétek!

$$a, \left(1 - \frac{a-b}{a+b}\right) : \left(1 - \frac{2b}{a+b}\right) - \frac{4b^2}{a^2-b^2}; \quad b, \left(a - \frac{ab}{a+b}\right) : \left(b - \frac{ab}{a-b}\right).$$