

Lineárne nerovnice s jednou neznámou

D. Nerovnica má dve strany (ľavá a pravá strana nerovnice) a medzi nimi jeden zo štyroch možných symbolov „<“, „≤“, „>“, „≥“, pričom aspoň na jednej strane je výraz (čiže obsahuje aspoň jednu neznámu).

číslo je riešením (koreňom) nerovnice – po dosadení čísla namiesto neznámej do pôvodného tvaru nerovnice platí vzťah medzi stranami

riešiť nerovnicu – nájsť všetky riešenia nerovnice

množina riešení (obor pravdivosti nerovnice) – súhrn všetkých riešení nerovnice

ekvivalentná úprava nerovnice – nerovnica pred úpravou a po úprave má presne tie isté riešenia → ani nepribudne ani neubudne riešenie

ekvivalentné úpravy:

- k obidvom stranám nerovnice môžeme **pripočítať** to isté číslo alebo ten istý výraz → prenášanie členov z jednej strany na druhú

$$\begin{array}{ll} 3x - 5 > 7 + 4x & /+ 5 \\ 3x > 12 + 4x & /- 4x \\ -x > 12 & \end{array}$$

- obidve strany nerovnice môžeme **vynásobiť** tým istým **nenulovým** číslom alebo výrazom → odstránenie zlomkov a koeficientov

$$\begin{array}{ll} \frac{2x+6}{6} \leq x-5 & /.6 \\ 2x+6 \leq 6x-30 & \\ \dots & \\ 4x < 12 & /:4 \\ x < 3 & \end{array}$$

Doriešme príklad z prvej ekvivalentnej úpravy:

$$\begin{array}{ll} -x > 12 & /.(-1) \\ x > -12 & \end{array}$$

Riešme teraz prenášaním členov:

$$\begin{array}{ll} -x > 12 & /+x \\ 0 > 12 + x & /-12 \\ -12 > x & \text{alebo vymenením strán } x < -12 \end{array}$$

Prvýkrát sme dostali, že x má byť viac ako -12 ; druhýkrát, že x má byť menej ako -12 . Teraz ktorý je správny výsledok? A prečo vychádzajú opačné výsledky?

Samozrejme ten druhý výsledok je správny. A prečo sme dostali nesprávne riešenie a ako tomu zabrániť? Musíme druhú ekvivalentnú úpravu (násobenie) doplniť. Takže úplné znenie vyzerá nasledovne:

- obidve strany nerovnice môžeme **vynásobiť** tým istým **nenulovým** číslom alebo výrazom, ale ak násobíme záporným číslom alebo výrazom, potom sa otočí smer nerovnice (treba obrátiť symbol)

P. Netreba zvlášť spomenúť „odčítať“ a „vydeliť“:

odčítanie nahradí pripočítanie opačného čísla alebo výrazu: $/- 4x \equiv /+ (-4x)$

delenie nahradí násobenie s prevrátenou hodnotou čísla alebo výrazu: $/:7 \equiv /.\frac{1}{7}$

P. Tieto ekvivalentné úpravy sú založené na vlastnostiach reálnych čísel.

Takisto aj pri nerovniciach je dovolené vymeniť strany a pritom otočiť smer nerovnice (takisto je úplne jedno, či na konci výsledok bude na pravej strane a neznáma na ľavej, alebo naopak). Aby sme lepšie pochopili výsledok, vždy čítajte z hľadiska neznámej.

$-12 > x$ nečítajte tak, že: „ -12 je väčšie ako x “ ale „ x je menšie ako -12 “

skúška správnosti – z riešení (z intervalu/intervalov) dosadíme do pôvodného tvaru nerovnice jedno zvolené číslo → ak platí vzťah, potom interval/intervaly je/sú riešením, ináč nie.

P. K úplnému riešeniu nerovnice hocikakého typu patrí aj skúška.

Ak dostaneme nejakú nerovnicu s jednou neznámou, ktorá obsahuje zátvorky, lomené výrazy a žiadne ďalšie funkcie, na prvý pohľad sa nedá určiť o akú nerovnicu ide (podľa stupňa neznámej).

D. Nerovnica je *lineárna*, ak ju môžeme upraviť na taký tvar (odstránením zlomkov, zátvoriek, prenášaním a zlúčením členov) aby na jednej strane bola lineárna funkcia a na druhej číslo 0.

$$\begin{array}{l} < < \\ a \cdot x + b \leq 0 \text{ alebo } 0 \leq a \cdot x + b \\ > > \\ \geq \geq \end{array}$$

Potom riešením nerovnice bude:

$$\begin{array}{l} < \\ x \leq -\frac{b}{a}, \text{ ak } a > 0 \\ > \\ \geq \\ > \\ x \geq -\frac{b}{a}, \text{ ak } a < 0 \\ < \\ \leq \end{array}$$

Počet riešení lineárnej nerovnice s jednou neznámou môže byť trojaký:

- a, lineárna nerovnica má nekonečne veľa riešení – jeden interval, kde na jednej strane je $-\infty$ alebo ∞ (drvivá väčšina príkladov)
- b, lineárna nerovnica nemá riešenie – na konci dostaneme **nepravdu** (porovnanie dvoch čísel)
- c, lineárna nerovnica má konečný počet riešení – iba vtedy, ak nerovnicu treba riešiť na špeciálnej množine (pr. v množine prirodzených čísel)

Intervaly:

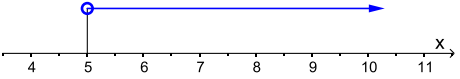
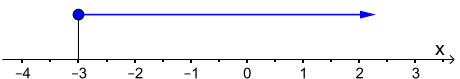
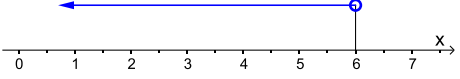
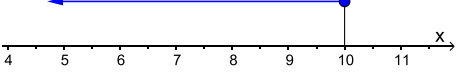
Interval môže byť

otvorený – vo výsledku je ostro väčšie/ostro menšie ($>$ alebo $<$)

hranica (číslo) už nepatrí do intervalu: najmenšie (prvé)/najväčšie (posledné) riešenie sa nedá určiť
takisto interval je vždy otvorený pri $-\infty$ a ∞ (nekonečno nie je číslo – je abstraktný pojem)

uzavretý – vo výsledku je väčšie alebo sa rovná/menšie alebo sa rovná ($\geq$ alebo $\leq$)

tu poznáme presnú hranicu intervalu: najmenšie (prvé)/najväčšie (posledné) riešenie

výsledok	zápis	graficky
$x > 5$	$x \in (5; \infty)$	
$x \geq -3$	$x \in [-3; \infty)$	
$x < 6$	$x \in (-\infty; 6)$	
$x \leq 10$	$x \in (-\infty; 10]$	

príklad:

Riešte nerovnice:

a, $5x - 7 \leq 3$

d, $3(x + 2) > 5$

b, $3x + 5 > 4x - 9$

e, $4x + 1 \geq 2(2x - 3)$

c, $2(x - 1) \leq 4x + 6$

f, $3(2x + 4) < 2(3x + 2)$

a, $5x - 7 \leq 3$

$5x \leq 10$

$x \leq 2$

$/+7$

$/:5$

$x \in (-\infty; 2]$

$$0 \in (-\infty; 2)$$

$$L: 5 \cdot 0 - 7 = 0 - 7 = -7$$

$$P: 3$$

$$-7 < 3$$

$$\begin{aligned} b, 3x + 5 &> 4x - 9 & /+9 - 3x \\ 14 &> x \end{aligned}$$

$x \in (-\infty; 14)$ + skúška

$$\begin{aligned} c, 2(x - 1) &\leq 4x + 6 \\ 2x - 2 &\leq 4x + 6 & /-2x - 6 \\ -8 &\leq 2x & /:2 \\ -4 &\leq x \end{aligned}$$

$x \in \langle -4; \infty)$ + skúška

$$\begin{aligned} d, 3(x + 2) &> 5 \\ 3x + 6 &> 5 & /-6 \\ 3x &> -1 & /:3 \\ x &> -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$x \in \left(-\frac{1}{3}; \infty\right)$ + skúška

$$\begin{aligned} e, 4x + 1 &\geq 2(2x - 3) \\ 4x + 1 &\geq 4x - 6 & /-4x \\ 1 &\geq -6 \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}$ + skúška

$$\begin{aligned} f, 3(2x + 4) &< 2(3x + 2) \\ 6x + 12 &< 6x + 6 & /-6x \\ 12 &< 6 \end{aligned}$$

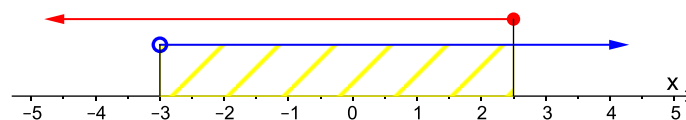
nemá riešenie

Dané nerovnice riešte v daných intervaloch:

$$a, 7x + 5 \leq 3(5 + x); x \in (-3; \infty) \qquad b, \frac{4x+2}{5} - 2x > x + \frac{x-1}{2}; x \in \langle 3; \infty)$$

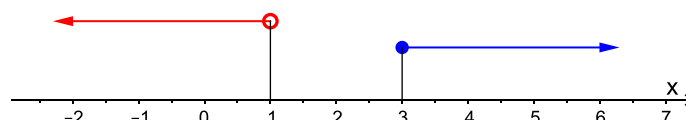
$$\begin{aligned} a, 7x + 5 &\leq 3(5 + x) \\ 7x + 5 &\leq 15 + 3x & /-5 - 3x \\ 4x &\leq 10 & /:4 \\ x &\leq 2,5 \end{aligned}$$

graficky určíme prienik daného intervalu a výsledku



$x \in (-3; 2,5]$ + skúška

$$\begin{aligned} b, \frac{4x+2}{3} - x &> x + \frac{x-1}{2} & / \cdot 6 \\ 2(4x + 2) - 6x &> 6x + 3(x - 1) \\ 8x + 4 - 6x &> 6x + 3x - 3 \\ 2x + 4 &> 9x - 3 & /-2x + 3 \\ 7 &> 7x & /:1 \\ 1 &> x \end{aligned}$$



nemá riešenie

Riešte nerovnice:

$$a, \frac{2x+3}{x-1} > 1$$

$$b, \frac{x-5}{2x+3} + 1 \geq -1$$

P. Nerovnicu s lomeným výrazom len tak nemôžeme násobiť výrazom (cieľom odstrániť lomený výraz). Väčšina výrazov (sú aj výnimky) môže nadobudnúť aj kladnú aj zápornú hodnotu, v závislosti od dosadenej hodnoty neznámej. Preto musíme riešenie rozdeliť na dve vetvy – raz predpokladáme, že hodnota výrazu je kladná (vypočítame z nerovnice, pre aké neznáme to platí – dostaneme interval ako predpoklad); riešime nerovnicu. Výsledok potom porovnáme s predpokladom (ich prienik bude časť celkového riešenia). Podobne postupujeme aj s predpokladom zápornej hodnoty výrazu v menovateli. Lenže tu pri odstránení lomeného výrazu (nakolko násobíme záporným výrazom) otočíme smer nerovnice. Potom celkové riešenie bude zjednotenie čiastkových riešení.

P. Nie vždy vznikne prienik na obidvoch vetvách.

Nezabudnime ani na podmienku.

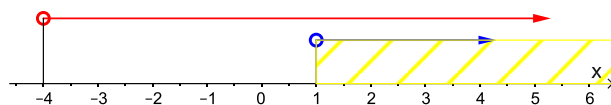
$$a, \frac{2x+3}{x-1} > 1 \quad x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$$

$$\text{I. } x-1 > 0 \\ x > 1$$

$$\frac{2x+3}{x-1} > 1 \quad / \cdot (x-1) \\ 2x+3 > x-1 \quad / -x-3 \\ x > -4$$

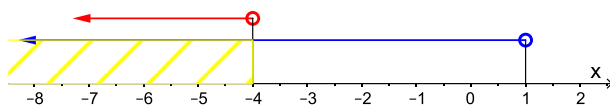
$$\text{II. } x-1 < 0 \\ x < 1$$

$$\frac{2x+3}{x-1} > 1 \quad / \cdot (x-1) \\ 2x+3 < x-1 \quad / -x-3 \\ x < -4$$



$$x \in (1; \infty)$$

$$x \in (-\infty; -4) \cup (1; \infty) + \text{skúška}$$



$$x \in (-\infty; -4)$$

$$b, \frac{x-5}{2x+3} + 1 \geq -1$$

P. Druhý spôsob riešenia je anulovanie nerovnice (na jednej strane ostane iba 0) a zlúčenie výrazov do jedného zlomku. Potom vychádzame z toho, že podiel iba vtedy je:

- kladný, ak delíme čísla (výrazy) s rovnakým znamienkom
- záporný, ak delíme čísla (výrazy) s opačným znamienkom
- ak je tam aj rovná sa, potom čitateľ pôjde do sústavy nerovnic aj s rovná sa

$$\frac{x-5}{2x+3} + 1 \geq -1 \quad / +1$$

$$\frac{x-5}{2x+3} + 2 \geq 0$$

$$\frac{x-5}{2x+3} + \frac{2 \cdot (2x+3)}{2x+3} \geq 0$$

$$\frac{x-5+4x+6}{2x+3} \geq 0$$

$$\frac{5x+1}{2x+3} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(5x+1 \geq 0 \wedge 2x+3 > 0) \vee (5x+1 \leq 0 \wedge 2x+3 < 0)$$

$$5x+1 \geq 0 \quad / -1$$

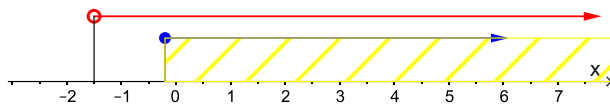
$$5x \geq -1 \quad / :5$$

$$x \geq -\frac{1}{5}$$

$$2x+3 > 0 \quad / -3$$

$$2x > -3 \quad / :2$$

$$x > -\frac{3}{2}$$



$$x \in \left[-\frac{1}{5}; \infty\right)$$

$$5x + 1 \leq 0 \quad /-1$$

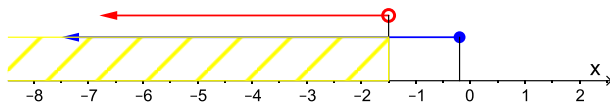
$$5x \leq -1 \quad /:5$$

$$x \leq -\frac{1}{5}$$

$$2x + 3 < 0 \quad /-3$$

$$2x < -3 \quad /:2$$

$$x < -\frac{3}{2}$$



$$x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$$

$$x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left[-\frac{1}{5}; \infty\right) + \text{skúška}$$

Dané nerovnice riešte v množine $\mathbb{R}$ a nakreslite vždy množinu P všetkých ich riešení:

a, $2x - 3 \leq 1$

b, $-x + 18 > x + 16$

c, $3x + 11 < x + 2(x - 3)$

d, $4x + 3 \geq 12(6 - x)$

e, $-23x < 3(8 + 2x)$

f, $5(x - 2) + x \geq 11 - 3(x + 1)$

Dané nerovnice riešte v množine $\mathbb{R}$:

a, $\frac{2}{5}x - 3 < 5x - 11$

b, $\frac{2x}{3} - 5 > -6$

c, $x + 2 \leq -4 - \frac{2}{3}x$

d, $10x + \frac{5}{2} \geq 3(x - 1) + \frac{3x}{4}$

e, $\frac{2x+1}{3} + x < x + \frac{3x+2}{6}$

f, $\frac{12x-1}{4} > x + \frac{1}{6}$

Dané nerovnice riešte v množine $\mathbb{N}$:

a, $3x - 2 < 2(0,1x + 3)$

b, $x < -x + 2,4\frac{x+1}{6}$

c, $4x - \frac{3x+1}{4} \geq 18$

d, $0,33x + 2(0,1x - 3,6) > 0$

Dané nerovnice riešte v množine $\mathbb{R}$:

a, $\frac{x-1}{x+1} > 1$

b, $\frac{6x+4}{2x-1} + 1 > -13$

c, $\frac{11x+2}{12x+3} - 11 > 0$