

Lomené výrazy

D. Lomený výraz obsahuje aspoň jednu neznámu v jednom z menovateľov.

pr.: $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3x-1}; \frac{x-2}{4} + \frac{5}{x+4} - \frac{x^2-2x+6}{4x-3}; \frac{xy+y^2}{x^3-xy}$ – sú lomené výrazy

ale: $\frac{x}{3}; \frac{3x+2}{5}; \frac{5}{7}xy^3$ – nie sú lomené výrazy

P. Nakoľko s nulou nemôžeme deliť, musíme zabezpečiť, aby sa nula nedostala do menovateľa. Preto musíme skôr, než začneme úpravami lomeného výrazu, určiť podmienky, kedy má daný výraz zmysel.

- každý menovateľ, ktorý obsahuje neznámu (neznáme) sa nesmie rovnať nule
- potom sa snažíme z toho vyjadriť neznámu, čomu sa nesmie rovnať (niekedy to nedokážeme → napríklad ak je výraz vyššieho stupňa ako 2)
- ak menovateľ obsahuje viac neznámych, potom si vyberme jednu z nich a v podmienke tú vyjadríme pomocou ostatných

Samozrejme pri úpravách lomených výrazov potrebujeme niekoľko vzťahov (viet) zo základnej školy.

P. Všetky vety môžeme využiť z oboch strán.

V.

a, **rozšírenie zlomku** ↔ zjednodušenie (krátenie) zlomku

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}; \forall c \neq 0$$

b, **súčet a rozdiel zlomkov** ↔ rozloženie zlomku do dvoch zlomkov

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$$

c, **násobenie zlomku s číslom**

$$c \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot c = \frac{ca}{b}$$

d, **súčin zlomkov**

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

e, **podiel zlomkov**

$$c : \frac{a}{b} = c \cdot \frac{b}{a} = \frac{cb}{a}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Ak chceme **sčítať** alebo **odčítať zlomky** potrebujeme nájsť spoločného menovateľa lomených výrazov.

spoločný menovateľ – je vlastne najmenší spoločný násobok všetkých menovateľov

najmenší spoločný násobok – výraz najnižšieho stupňa, ktorý je deliteľný s každým výrazom

- aby sme našli čo najjednoduchšie spoločný menovateľ, treba výrazy v menovateľoch upraviť na súčin takzvaných ireducibilných polynómov (**ireducibilný polynóm** – ďalej sa nedá rozložiť na súčin polynómov nižšieho stupňa)

» sú to všetky lineárne výrazy (z nich maximálne číslo sa dá vyňať): $ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$

» kvadratické výrazy, z ktorých vytvorená kvadratická rovnica (tak, že výraz sa rovná nule) nemá riešenie v množine reálnych čísel: $ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

- rozložiť na súčin môžeme vyňatím pred zátvorku a pomocou vzorcov

príklad:

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x^2+3x} - \frac{2x-1}{3x^2+9x} + \frac{5}{x} &= \frac{x+2}{x(x+3)} - \frac{2x-1}{3x(x+3)} + \frac{5}{x} && x \neq 0 \\ &&& x+3 \neq 0 \rightarrow x \neq -3 \\ &= \frac{(x+2) \cdot 3 - (2x-1) + 5 \cdot 3(x+3)}{3x(x+3)} = \frac{3x+6-2x+1+15x+45}{3x(x+3)} = \frac{16x+52}{3x(x+3)} \\ \frac{3x+1}{x^2-2x-15} - \frac{x+4}{x^2-7x+10} &= \frac{3x+1}{(x+3)(x-5)} - \frac{x+4}{(x-5)(x-2)} && x+3 \neq 0 \rightarrow x \neq -3 \\ &&& x-5 \neq 0 \rightarrow x \neq 5 \\ &&& x-2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2 \\ &= \frac{(3x+1)(x-2) - (x+4)(x+3)}{(x+3)(x-5)(x-2)} = \frac{3x^2-6x+x-2-(x^2+3x+4x+12)}{(x+3)(x-5)(x-2)} = \frac{3x^2-5x-2-x^2-7x-12}{(x+3)(x-5)(x-2)} = \frac{2x^2-12x-14}{(x+3)(x-5)(x-2)} \end{aligned}$$

Ak **zlomok** je **násobený** s **číslom** alebo **výrazom** (číslo/výraz môže stáť pred zlomkovou čiarou alebo za), potom to číslo/výraz násobí **iba čitateľ**.

príklad:

$$7 \cdot \frac{4x+3}{x+5} = \frac{4x+3}{x+5} \cdot 7 = \frac{7(4x+3)}{x+5} = \frac{28x+21}{x+5} \quad x+5 \neq 0 \rightarrow x \neq -5$$

$$(2x-5) \cdot \frac{x+2}{3x-1} = \frac{x+2}{3x-1} \cdot (2x-5) = \frac{(2x-5)(x+2)}{3x-1} =$$

$$= \frac{2x^2+4x-5x-10}{3x-1} = \frac{2x^2-x-10}{3x-1} \quad 3x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{1}{3}$$

Pri **násobení zlomkov** násobíme čitateľ s čitateľom a menovateľ s menovateľom. Samozrejme pred vynásobením skúsime zjednodušiť (krátiť) výraz ak sa dá.

príklad:

$$\frac{4x^2y^3}{3a^3b^8} \cdot \frac{27a^5b^2}{32x^3y^6} = \frac{1}{b^6} \cdot \frac{9a^2}{8xy^3} = \frac{9a^2}{8b^6xy^3} \quad a, b, x, y \neq 0$$

$$\frac{x-5}{x+1} \cdot \frac{3x+2}{x-2} = \frac{(x-5)(3x+2)}{(x+1)(x-2)} = \frac{3x^2+2x-15x-10}{x^2-2x+x-2} =$$

$$= \frac{3x^2-13x-10}{x^2-x-2} \quad x+1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1; x-2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2$$

Pri **delení zlomkov** prvý činiteľ (prvý lomený výraz) násobíme s prevrátenou (recipročnou) hodnotou druhého zlomku. Ak delenie je v tvare zloženého zlomku, potom lomený výraz z čitateľa násobíme s prevrátenou hodnotou menovateľa (inakšie povedané: súčin vonkajších členov delíme so súčinom vnútorných členov).

P. Nezabudnime, že pri delení s lomeným výrazom ten lomený výraz ako deliteľ sa tiež nesmie rovnať nule. Treba aj to uviesť do podmienok. Ale stačí určiť ďalšiu podmienku, keď delenie prepíšeme na násobenie, a vtedy vznikne ďalší lomený výraz s novým menovateľom.

príklad:

$$\frac{32x^3}{9y^8} : \frac{4xy^3}{81x^2z} = \frac{32x^3}{9y^8} \cdot \frac{81x^2z}{4xy^3} = \frac{8x^3}{y^8} \cdot \frac{9xz}{y^3} = \frac{72x^4z}{y^{11}} \quad x, y, z \neq 0$$

$$\frac{b-1+\frac{6}{b-6}}{b-2+\frac{3}{b-6}} = \frac{\frac{(b-1)(b-6)+6}{b-6}}{\frac{(b-2)(b-6)+3}{b-6}} = \frac{\frac{b^2-6b-b+6+6}{b-6}}{\frac{b^2-6b-2b+12+3}{b-6}} = \frac{\frac{b^2-7b+12}{b-6}}{\frac{b^2-8b+15}{b-6}} =$$

$$= \frac{b^2-7b+12}{b-6} \cdot \frac{b-6}{b^2-8b+15} = \frac{(b-3)(b-4)}{b-6} \cdot \frac{b-6}{(b-3)(b-5)} = \frac{b-4}{b-5} \quad b-6 \neq 0 \rightarrow b \neq 6$$

$$b^2-8b+15 \neq 0 \rightarrow b \neq 3; b \neq 5$$

Skráťte uvedené zlomky a uďte podmienky, za ktorých majú zlomky zmysel:

$$a, \frac{8ax}{12ay}; \quad b, \frac{12x^2yz}{18x^2y^3z}; \quad c, \frac{ax+bx}{ax-bx};$$

$$d, \frac{180xy^2z^3}{15x^3y^2z^2}; \quad e, \frac{36m^2n^3r}{9m^3r^3}.$$

Scítajte dané zlomky a potom ich kráťte:

$$a, \frac{x-y}{a-y} - \frac{x+y}{y-a} + \frac{2}{a^2-y^2}; \quad b, \frac{2x+1}{x^2-2x} - \frac{1}{x^2-4}.$$

Vypočítajte a uďte, kedy majú zlomky zmysel:

$$a, \left(\frac{1}{a+1} - \frac{2a}{a^2-1}\right) \left(\frac{1}{a} - 1\right); \quad b, \left(\frac{x-1}{x-2} - \frac{x}{x-1}\right) \left(x - \frac{3x}{x+1}\right); \quad c, \frac{x^2+xy}{x^2+y^2} \left(\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}\right);$$

$$d, \frac{x^2-c^2}{x+y} \cdot \frac{x^2-y^2}{xc+c^2} \left(x + \frac{xc}{x-c}\right); \quad e, \frac{m^4-n^4}{m^2-2mn+n^2} \cdot \frac{m-n}{m^2+mn}.$$

Zjednodušte:

$$a, \left(1 - \frac{a-b}{a+b}\right) : \left(1 - \frac{2b}{a+b}\right) - \frac{4b^2}{a^2-b^2}; \quad b, \left(a - \frac{ab}{a+b}\right) : \left(b - \frac{ab}{a-b}\right).$$