Másodfokú egyenlőtlenségek
(Kvadratické nerovnice)

átalakítás után: $a.x^2 + b.x + c$ [<; ≤; >; ≥] 0 $a; b; c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$

vagyis: $f(x)$ $\underbrace{[<; \leq; >; \geq]}_{\text{egy a négy jelből}}$ 0

1. először megoldjuk mint egyenletet
2. a számegyenesen kijelöljük a pontokat/pontot, ahol áthalad a parabola (érinti, vagy nincs közös pontjuk)
3. a főegyüttható (a) előjele alapján rajzoljuk meg a parabolát – száraival felfelé ($a > 0$), vagy lefelé ($a < 0$)
4. az átalakított egyenlőtlenség iránya szerint keressük a parabola megfelelő részét(-eit) az x tengely felett [$f(x) > 0$]; vagy az x tengely alatt [$f(x) < 0$] – illetve a tengellyel közös pontot, ha megengedett az „=“ is

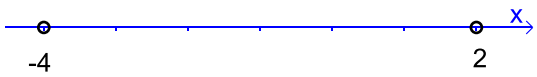
M. Ha az egyenletnek nincs megoldása, akkor vagy az egész parabola az x tengely felett ($a > 0$), vagy alatta ($a < 0$) van.

példa:

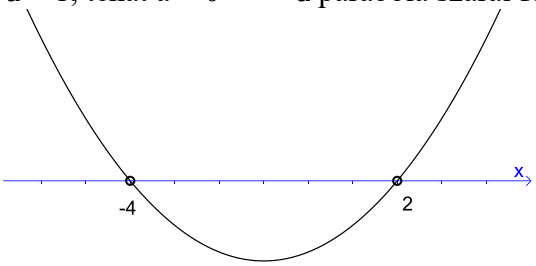
Oldjuk meg a másodfokú egyenlőtlenséget: $x^2 + 2x - 8 > 0$

1. $x^2 + 2x - 8 = 0$

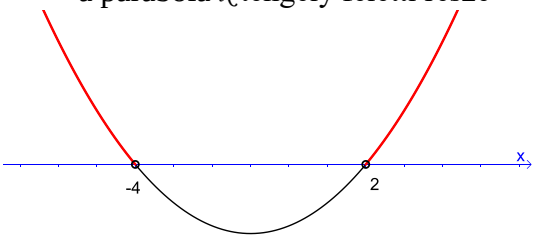
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.(-8)}}{2.1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow -4 \end{matrix}$$

2. 

3. x^2 → a = 1, tehát a > 0 ⇒ a parabola szárai felfelé mutatnak



4. $f(x) > 0$ ⇒ a parabola x tengely feletti része

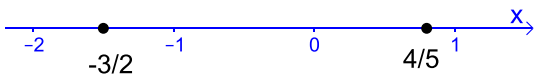


$x \in (-\infty; -4) \cup (2; \infty)$

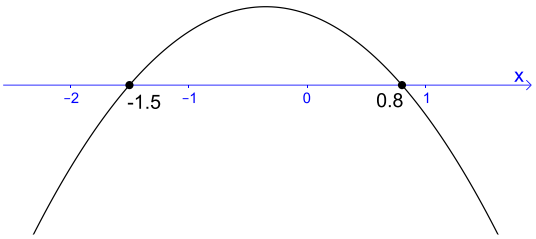
Oldjuk meg a másodfokú egyenlőtlenséget: $-10x^2 - 7x + 12 \geq 0$

1. $-10x^2 - 7x + 12 = 0$

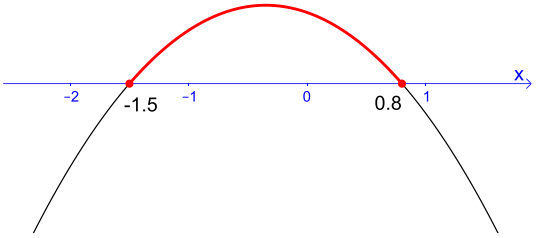
$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4.(-10).12}}{2.(-10)} = \frac{7 \pm \sqrt{49+480}}{-20} = \frac{7 \pm 23}{-20} = \begin{matrix} \nearrow -\frac{3}{2} \\ \searrow \frac{4}{5} \end{matrix}$$

2. 

3. $-10x^2$ → a = -10, tehát a < 0 ⇒ a parabola szárai lefelé mutatnak



4. $f(x) \geq 0$ ⇒ a parabola x tengely feletti része és a tengelypontjai

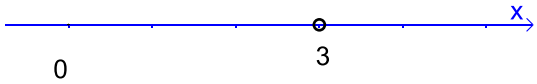


$x \in \left\langle -\frac{3}{2}; \frac{4}{5} \right\rangle$

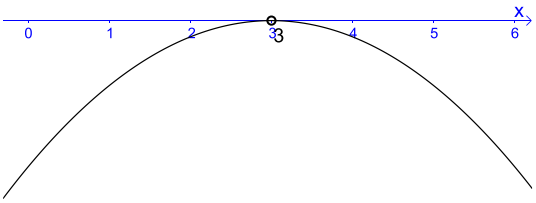
Oldjuk meg a másodfokú egyenlőtlenséget: $-2x^2 + 12x - 18 < 0$

1. $-2x^2 + 12x - 18 = 0$

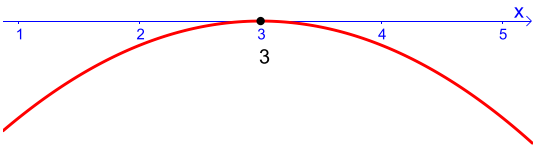
$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4.(-2).18}}{2.(-2)} = \frac{-12 \pm \sqrt{144-144}}{-4} = \frac{-12 \pm 0}{-4} = 3$$

2. 

3. $-2x^2$ → a = -2, tehát a < 0 ⇒ a parabola szárai lefelé mutatnak



4. $f(x) < 0$ ⇒ a parabola x tengely alatti része

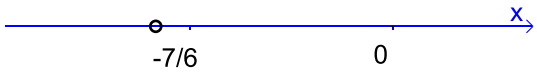


$x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Oldjuk meg a másodfokú egyenlőtlenséget: $3x^2 + 7x + 6 \leq 0$

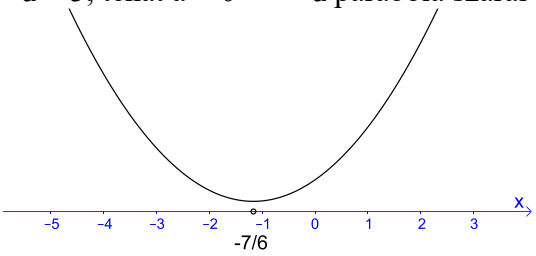
1. $3x^2 + 7x + 6 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-7\pm\sqrt{7^2-4.3.6}}{2.3} = \frac{-7\pm\sqrt{49-72}}{6} = \frac{-7\pm\sqrt{-23}}{6}$ → az egyenletnek nincs megoldása az ℝ halmazon

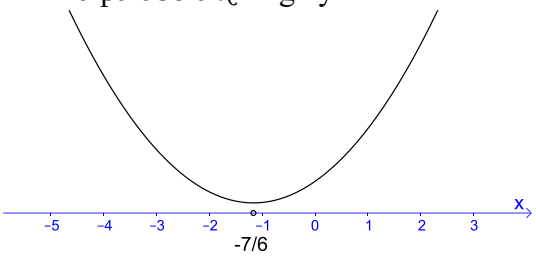


2.

3. $3x^2$ → a = 3, tehát a > 0 ⇒ a parabola szárai felfelé mutatnak



4. $f(x) \leq 0$ ⇒ a parabola x tengely alatti része és a tengelypontjai

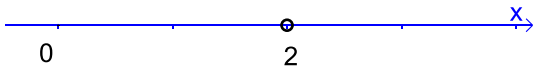


x ∈ Ø

Oldjuk meg a másodfokú egyenlőtlenséget: $-x^2 + 4x - 5 < 0$

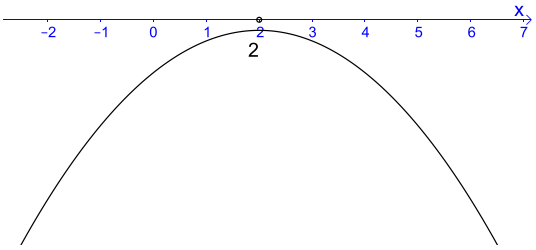
1. $-x^2 + 4x - 5 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{4^2-4.(-1).(-5)}}{2.(-1)} = \frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{-2} = \frac{-4\pm\sqrt{-4}}{-2}$ → az egyenletnek nincs megoldása az ℝ halmazon

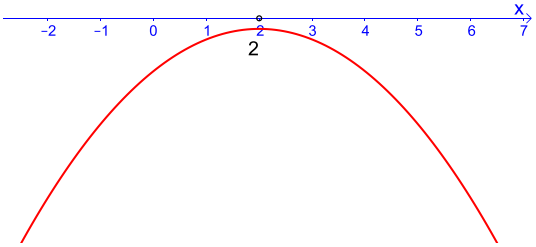


2.

3. $-x^2$ → a = -1, tehát a < 0 ⇒ a parabola szárai lefelé mutatnak



4. $f(x) < 0$ ⇒ a parabola x tengely alatti része



x ∈ ℝ

Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket az ℝ halmazon:

a, $2x^2 < 0$ b, $-x^2 \leq 0$ c, $-2(x - 1)^2 \leq 0$

d, $7x^2 + 1 > 0$ e, $-3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 > 2$

Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket az $\mathbb{R}$ halmazon:

a, $x^2 + 2x - 15 > 0$ b, $x^2 + 2x - 3 \leq 0$ c, $-x^2 + 4x - 4 > 0$

d, $-x^2 + 2x - 3 \leq 0$ e, $9x^2 - 12x + 4 \leq 0$ f, $-16x^2 + 32x - 7 \geq 0$