

Sústavy lineárnych rovníc

D. Sústava rovníc je súhrn najmenej dvoch rovníc obsahujúcich minimálne dve neznáme.

P. Predpokladajme, že sústava obsahuje k rovníc, pričom počet všetkých neznámych v rovniciach je n (nemusi každá rovnica sústavy obsahovať všetky neznáme).

usporiadaná n -tica čísel je riešením sústavy rovníc – po dosadení hodnôt všetkých premenných do pôvodných rovníc sústavy v každej rovnici platí rovnosť (dostaneme rovnaké hodnoty na oboch stranách rovníc)

P. Nezabudnime, že jedno riešenie sústavy vždy znamená viac čísel, ich počet sa rovná počtu neznámych – n .

riešiť sústavu rovníc – nájsť všetky riešenia sústavy

množina riešení – súhrn všetkých riešení sústavy rovníc

ekvivalentná úprava sústavy rovníc – sústava pred úpravou a po úprave má presne tie isté riešenia → ani nepribudne ani neubudne riešenie

ekvivalentné úpravy:

- k obojom stranám rovnice sústavy môžeme **pripočítať** to isté číslo alebo ten istý výraz → prenášanie členov z jednej strany na druhú
- oboje strany rovnice sústavy môžeme **vynásobiť** tým istým **nenulovým** číslom alebo výrazom → odstránenie zlomkov a koeficientov
- rovnice sústavy môžeme **sčítať** (zlúčiť): ľavú stranu s ľavou a pravú s pravou → redukcia (zníženie počtu neznámych – naraz aj viac) neznámych alebo eliminácia (odstránenie) neznámej

P. Ešte jedna „úprava“: môžeme zmeniť poradie rovníc sústavy. Ale podobne ako pri rovniciach sme spomenuli vymenenie strán rovnice, ani tento krok nie je takou úpravou, ktorou sa približujeme k riešeniu sústavy.

skúška správnosti – výsledok/výsledky dosadíme do pôvodného tvaru sústavy rovníc (do každej rovnice) → ak platí rovnosť vo všetkých rovniciach, potom je riešením, ináč nie.

P. K úplnému riešeniu sústavy hocijakého typu patrí aj skúška.

triedenie sústav rovníc:

podľa **počtu rovníc**: sústava dvoch, troch, ... rovníc

podľa **počtu neznámych**: sústava s dvomi, tromi, ... neznámymi

podľa **stupne**: lineárnych, kvadratických, ...

Ako postupujeme pri riešení sústav? Postupne eliminujeme neznáme, aby na konci v jednej rovnici ostala iba jedna neznáma. Začneme s najjednoduchšími:

Sústavy dvoch lineárnych rovníc s dvomi neznámymi

Všeobecne (po úpravách: po odstránení zlomkov, zátvoriek, prenášaní a zlúčení členov) má tvar:

$$a_1x + b_1y = c_1, \text{ kde } a_1; a_2; b_1; b_2; c_1; c_2 \in \mathbb{R}$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

P. Pri úpravách jednotlivých rovníc píšeme oboje rovnice paralelne (aj keď už jedna je upravená) a podčiarkneme druhú rovnicu (tým oddelíme od ďalšieho kroku v úpravách).

V. Riešením takto upravenej sústavy, ak má, je dvojica čísel (predpoklad: $a_1.b_2 - a_2.b_1 \neq 0$):

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Tento vzorec ale nezvykneme používať a ani by som nechcel pri riešení sústavy. Máme ale rôzne spôsoby, metódy, ktorými môžeme riešiť sústavy.

Ešte o počte riešení sústavy dvoch lineárnych rovníc s dvomi neznámymi. Takáto sústava môže mať:

a, jedno riešenie (dvojica čísel) – drvivá väčšina príkladov

b, nekonečne veľa riešení – ale nie hocijaká dvojica čísel: zvolenie jednej neznámej už určí hodnotu druhej neznámej (jednu neznámu vyjadríme pomocou druhej neznámej z jednej rovnice sústavy); podobne ako pri rovniciach: na konci dostaneme **pravdu** (rovnosť rovnakých čísel)

c, nemá riešenie – na konci dostaneme **nepravdu** (rovnosť dvoch rôznych čísel)

1. dosadzovacia metóda (substitučná):

- z jednej rovnice sústavy vyjadríme jednu neznámu (z tej rovnice a tú neznámu, ktorá má najmenší koeficient – najbližšie celé číslo k nule – lebo tým koeficientom pri vyjadrení treba deliť rovnicu), potom výraz z druhej strany vyjadrenia dosadíme do druhej rovnice

- tá potom už iba jednu neznámu obsahuje, ktorú potom ľahko vyjadríme
- výpočet druhej neznámej je potom dosadením do vyjadrenej rovnice

$$\begin{array}{rcl}
 2x + y & = & -0,5 \\
 \underline{5x + 3y} & = & -2 \\
 y & = & -0,5 - 2x \\
 5x + 3(-0,5 - 2x) & = & -2 \\
 5x - 1,5 - 6x & = & -2 \\
 -x - 1,5 & = & -2 \\
 -x & = & -0,5 \\
 x & = & 0,5
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 /-2x \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 /+1,5 \\
 /.(-1)
 \end{array}$$

$$y = -0,5 - 2 \cdot 0,5 = -0,5 - 1 = -1,5$$

skúška:

$$L_1: 2 \cdot 0,5 + (-1,5) = 1 - 1,5 = -0,5$$

$$P_1: -0,5$$

$$L_1 = P_1$$

$$L_2: 5 \cdot 0,5 + 3 \cdot (-1,5) = 2,5 - 4,5 = -2$$

$$P_2: -2$$

$$L_2 = P_2$$

$$P = [0,5; -1,5]$$

P. Riešenie (dvojicu čísel) vždy píšeme podľa abecedného poradia (a nie podľa poradia vypočítania) – príklady môžu obsahovať aj iné neznáme ako x a y .

2. sčítacia metóda (adičná – metóda opačných koeficientov):

- tak násobíme rovnice (niekedy stačí jednu) aby pred jednou z neznámych stáli opačné koeficienty v rovniciach; tá neznáma po sčítaní rovníc zmizne zo zlúčenej rovnice (ich súčet sa rovná nule)
- druhú neznámu vypočítame dosadením do rovnice s menšími koeficientmi (môžeme aj do druhej, ale potom počítame s väčšími číslami)

$$\begin{array}{rcl}
 3x - 2y & = & 8 \\
 \underline{2x + y} & = & 10 \\
 3x - 2y & = & 8 \\
 \underline{4x + 2y} & = & 20 \\
 7x & = & 28 \\
 x & = & 4 \\
 2 \cdot 4 + y & = & 10 \\
 8 + y & = & 10 \\
 y & = & 2
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 / \cdot 2 \\
 \\
 /I. + II. \\
 /:7 \\
 \\
 /-8
 \end{array}$$

$$P = [4; 2] + \text{skúška}$$

3. porovnávací metóda (komparačná):

- z obidvoch rovníc vyjadríme ten istý výraz tak (môže to byť aj jedna z neznámych), aby na druhých stranách boli výrazy s tou istou jednou neznámou alebo bez
- potom môžeme písať rovnosť tých druhých strán – rovnica s jednou neznámou
- druhú neznámu vypočítame dosadením do rovnice s menšími koeficientmi

P. Veľmi zriedkavo sa využíva táto metóda. Väčšinou každý používa iba jednu z prvých dvoch metód – svoju obľúbenú. Ale niekedy sústava má taký tvar, že práve použitie tej druhej, „neobľúbenej“ metódy rýchlejšie dosiahne svoj cieľ. Aj táto porovnávací metóda patrí do tej skupiny, ak rovnice majú taký tvar, potom človek ju použije.

$$\begin{array}{rcl}
 x - 3y & = & 4 \\
 \underline{5x + 3y} & = & -1 \\
 5x - 15y & = & 20 \\
 \underline{5x + 3y} & = & -1 \\
 5x + 3y & = & 20 + 18y
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 / \cdot 5 \\
 \\
 /+18y
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 5x + 3y & = & -1 \\ 20 + 18y & = & -1 \quad /-20 \\ 18y & = & -21 \quad /:18 \\ y & = & -\frac{21}{18} = -\frac{7}{6} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x - 3\left(-\frac{7}{6}\right) & = & 4 \\ x + \frac{7}{2} & = & 4 \quad /-\frac{7}{2} \\ x & = & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$P = \left[\frac{1}{2}; -\frac{7}{6}\right] + \text{skúška}$$

4. grafická metóda:

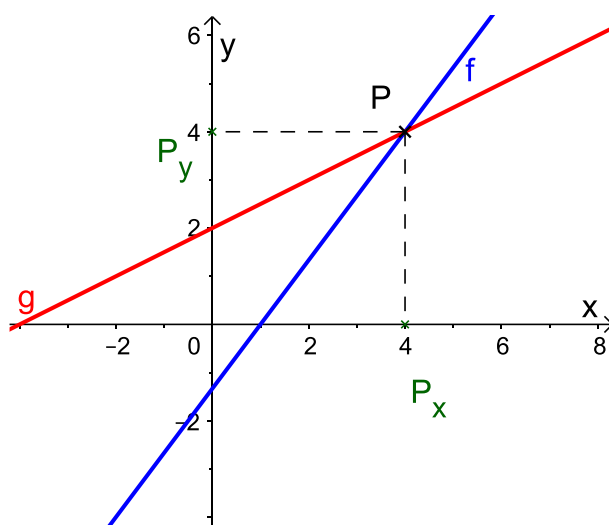
- z obidvoch rovníc vyjadríme y , tým dostaneme vlastne dve lineárne funkcie
- nakreslíme grafy obidvoch funkcií (dve priamky) do jednej súradnicovej sústavy a ich priesečník (ak existuje) má súradnice ako riešenie sústavy

P. Táto metóda iba vtedy funguje, ak riešenie je dvojica celých čísel. Ináč je nie veľmi presná.

$$\begin{array}{rcl} 4x - 3y & = & 4 \quad /-4x \\ x - 2y & = & -4 \quad /-x \\ -3y & = & 4 - 4x \quad /:(-3) \\ -2y & = & -4 - x \quad /:(-2) \\ y & = & \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} \\ y & = & \frac{1}{2}x + 2 \end{array}$$

$$f: y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$$

$$g: y = \frac{1}{2}x + 2$$



$$P = [4; 4] + \text{skúška}$$

Väčšina príkladov je takých, kde sústavu tvoria dve obyčajné rovnice, alebo maximálne racionálne koeficienty sa vyskytujú v rovniciach (číslo v menovateli). Ale existujú aj zložitejšie sústavy, ktoré obsahujú lomené výrazy.

príklad:

Riešme sústavu:

$$\begin{array}{l} a, \frac{4}{x} + \frac{7}{y} = \frac{1}{15} \\ \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -\frac{19}{15} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} b, \frac{2}{2x-y} + \frac{3}{x+3y} = -\frac{13}{5} \\ \frac{1}{2x-y} - \frac{4}{x+3y} = \frac{21}{5} \end{array}$$

a, $x; y \neq 0$
odstráňme lomené výrazy

$$\frac{4}{x} + \frac{7}{y} = \frac{1}{15} \quad / \cdot 15xy$$

$$\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -\frac{19}{15} \quad / \cdot 15xy$$

$$60y + 105x = xy$$

$$30y - 45x = -19xy \quad / \cdot (-2)$$

eliminujeme y na ľavej strane

$$60y + 105x = xy$$

$$\underline{-60y + 90x = 38xy} \quad /I. + II.$$

$$195x = 39xy$$

anulujeme rovnicu a potom vyjmeme x

$$195x - 39xy = 0$$

$$x(195 - 39y) = 0$$

v podmienke sme zabezpečili, aby x a y sa nerovnali nule $\rightarrow$ môžeme deliť rovnicu s x

$$195 - 39y = 0 \quad / +39y$$

$$195 = 39y \quad / :39$$

$$5 = y$$

$$\frac{4}{x} + \frac{7}{5} = \frac{1}{15} \quad / \cdot 15x$$

$$60 + 21x = x \quad / -21x$$

$$60 = -20x \quad / :(-20)$$

$$-3 = x$$

P = [-3; 5] + skúška

b,

$$2x - y \neq 0$$

$$2x \neq y$$

$$x + 3y \neq 0$$

$$x \neq -3y$$

$$\frac{2}{2x-y} + \frac{3}{x+3y} = -\frac{13}{5}$$

$$\frac{1}{2x-y} - \frac{4}{x+3y} = \frac{21}{5}$$

skúsme iný, jednoduchší spôsob (hoci bude dlhší)

zavedieme substitúciu:

$$a = \frac{1}{2x-y}$$

$$b = \frac{1}{x+3y}$$

potom sústava prejde do tvaru:

$$2a + 3b = -\frac{13}{5} \quad / \cdot 5$$

$$a - 4b = \frac{21}{5} \quad / \cdot 5$$

$$10a + 15b = -13$$

$$\underline{5a - 20b = 21} \quad / \cdot (-2)$$

$$10a + 15b = -13$$

$$\underline{-10a + 40b = -42} \quad /I. + II.$$

$$55b = -55 \quad / :55$$

$$b = -1$$

$$5a - 20 \cdot (-1) = 21 \quad / -20$$

$$5a = 1 \quad / :5$$

$$a = \frac{1}{5}$$

riešenie sústavy po substitúcii je jednoduchšie, ale žiaľ musíme vypočítať pôvodne neznáme – práca navyše

$$a = \frac{1}{2x-y}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{2x-y} \quad / \cdot 5(2x-y)$$

$$2x - y = 5$$

$$\begin{array}{rcl}
b & = & \frac{1}{x+3y} \\
-1 & = & \frac{1}{x+3y} \quad / \cdot (x+3y) \\
-1 \cdot (x+3y) & = & 1 \\
-x-3y & = & 1 \\
2x-y & = & 5 \\
-x-3y & = & 1 \quad / \cdot 2 \\
2x-y & = & 5 \\
-2x-6y & = & 2 \quad / \cdot I. + II. \\
-7y & = & 7 \quad / : (-7) \\
y & = & -1 \\
2x - (-1) & = & 5 \quad / -1 \\
2x & = & 4 \quad / : 2 \\
x & = & 2
\end{array}$$

P = [2; -1] + skúška

Sústavy troch lineárnych rovníc s tromi neznámymi

Všeobecne (po úpravách: po odstránení zlomkov, zátvoriek, prenášaní a zlúčení členov) má tvar:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \text{ kde } a_1; a_2; a_3; b_1; b_2; b_3; c_1; c_2; c_3; d_1; d_2; d_3 \in \mathbb{R}$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

V. Riešením takto upravenej sústavy, ak má, je trojica čísel (predpoklad: výraz v menovateľoch $\neq 0$):

$$x = \frac{b_2c_3d_1 + b_1c_2d_3 + b_3c_1d_2 - b_2c_1d_3 - b_3c_2d_1 - b_1c_3d_2}{a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3}$$

$$y = \frac{a_1c_3d_2 + a_3c_2d_1 + a_2c_1d_3 - a_3c_1d_2 - a_1c_2d_3 - a_2c_3d_1}{a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3}$$

$$z = \frac{a_1b_2d_3 + a_3b_1d_2 + a_2b_3d_1 - a_3b_2d_1 - a_1b_3d_2 - a_2b_1d_3}{a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3}$$

Postup pri riešení je taký, že postupne eliminujeme neznáme. Násobením a sčítaním dvoch a dvoch rovníc dostaneme sústavu dvoch rovníc s dvomi neznámymi. Potom už ten ďalší spôsob si zvolíme sami.

Riešte v množine $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sústavy rovníc:

$$\begin{array}{l}
\text{a, } 2x - 3y + z = 22 \\
-x + 2y - 4z = -30 \\
3x - y + 2z = 25
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\text{b, } 2x + 3y = 1 \\
4y + 5z = -6 \\
3x - 6y - 2z = -5
\end{array}$$

a,

$$\begin{array}{rcl}
2x - 3y + z & = & 22 \\
-x + 2y - 4z & = & -30 \quad / \cdot I. + 2 \cdot II. \\
3x - y + 2z & = & 25 \quad / \cdot 3 \cdot II. + III. \\
2x - 3y + z & = & 22 \\
-2x + 4y - 8z & = & -60 \\
y - 7z & = & -38 \\
-3x + 6y - 12z & = & -90 \\
3x - y + 2z & = & 25 \\
5y - 10z & = & -65 \\
y - 7z & = & -38 \quad / \cdot (-5) \\
5y - 10z & = & -65 \\
-5y + 35z & = & 190 \\
5y - 10z & = & -65 \quad / \cdot I. + II. \\
25z & = & 125 \quad / : 25 \\
z & = & 5 \\
y - 7 \cdot 5 & = & -38
\end{array}$$

$$y - 35 = -38 \quad /+35$$

$$y = -3$$

$$2x - 3 \cdot (-3) + 5 = 22$$

$$2x + 9 + 5 = 22 \quad /-14$$

$$2x = 8 \quad /:2$$

$$x = 4$$

$P = [4; -3; 5]$ + skúška

b,

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 1 \\ 4y + 5z & = & -6 \\ \underline{3x - 6y - 2z} & = & -5 \quad /3.I. + (-2).III. \\ 6x + 9y & = & 3 \\ \underline{-6x + 12y + 4z} & = & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 21y + 4z & = & 13 \quad /.5 \\ 4y + 5z & = & -6 \quad /.(-4) \\ 105y + 20z & = & 65 \\ \underline{-16y - 20z} & = & 24 \quad /I. + II. \\ 89y & = & 89 \quad /:89 \\ y & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3 \cdot 1 & = & 1 \\ 2x + 3 & = & 1 \quad /-3 \\ 2x & = & -2 \quad /:2 \\ x & = & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 4 \cdot 1 + 5z & = & -6 \\ 4 + 5z & = & -6 \quad /-4 \\ 5z & = & -10 \quad /:5 \\ z & = & -2 \end{array}$$

$P = [-1; 1; -2]$ + skúška

Dané sústavy rovníc riešte v množine $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Nájdené výsledky overte skúškou.

a, $\begin{array}{l} 3x = 27 \\ x + 2y = 11 \end{array}$

b, $\begin{array}{l} -3x + 2y = 11 \\ 3y = 3 \end{array}$

c, $\begin{array}{l} 11x - 21y = 6 \\ 5x = 8 \end{array}$

d, $\begin{array}{l} 12,8x - 131y = 287,6 \\ -41,2x = 82,4 \end{array}$

Dané sústavy rovníc riešte v množine $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Nájdené výsledky overte skúškou.

a, $\begin{array}{l} -x + y = 2 \\ y = 3 \end{array}$

b, $\begin{array}{l} 2x = 18 \\ y = 2 \end{array}$

c, $\begin{array}{l} 3x = 12 \\ -2y = 3 \end{array}$

d, $\begin{array}{l} 2,1x = 5 \\ -3y = 0 \end{array}$

e, $\begin{array}{l} -7x = 21 \\ 8y = -24 \end{array}$

f, $\begin{array}{l} 2,8x = 11,2 \\ 2y = -8 \end{array}$

Sústavy rovníc riešte v množine $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

a, $\begin{array}{l} 2(x - y) + 3 = x - 3(y - 2) + 2 \\ 3x - y = -(x + y) + 12 \end{array}$

b, $\begin{array}{l} -(2x + 1) - (x - y) = 3x + y + 5 \\ x + 2y = \frac{1}{2}(y + 2x) - 1,5 \end{array}$

c, $\begin{array}{l} 3x - 2 + y = 16x - (4,6 - y) \\ 3(2y - x) - 1,4 = 40 \end{array}$

Riešte dané sústavy rovníc jednak substitučnou, jednak eliminačnou metódou:

a, $\begin{array}{l} 5x - 11y = -67 \\ -3x + 2y = 8 \end{array}$

b, $\begin{array}{l} 12y + 3z = -18 \\ 4y - 7z = 42 \end{array}$

c, $\begin{array}{l} -2a + 21b = 83 \\ 6a + b = 71 \end{array}$

d, $\begin{array}{l} 8x + 3t = 77 \\ -2x + 5t = 21 \end{array}$

$$\text{e, } \begin{aligned} 7u + 2v &= 11 \\ -12u + 5v &= -27 \end{aligned}$$

$$\text{f, } \begin{aligned} 2x + 9y &= -2 \\ -3x + 5y &= -34 \end{aligned}$$