

Zhodné zobrazenia (izometria)

Euklidovské konštrukcie – konštrukcie pomocou pravítka (rovné pravítko) a kružidla

- spojiť dva rôzne body jednou priamkou
- zobrať do kružidla vzdialenosť dvoch bodov
- nakresliť kružnicu okolo daného bodu s daným polomerom (aby prechádzala iným bodom alebo mala polomer ako veľkosť známej úsečky)
- vyznačiť priesečník priamok (ak existuje)
- vyznačiť priesečník priamky a kružnice (jeden alebo obidva – ak existuje/ú)
- vyznačiť priesečník dvoch kružníc (jeden alebo obidva – ak existuje/ú)

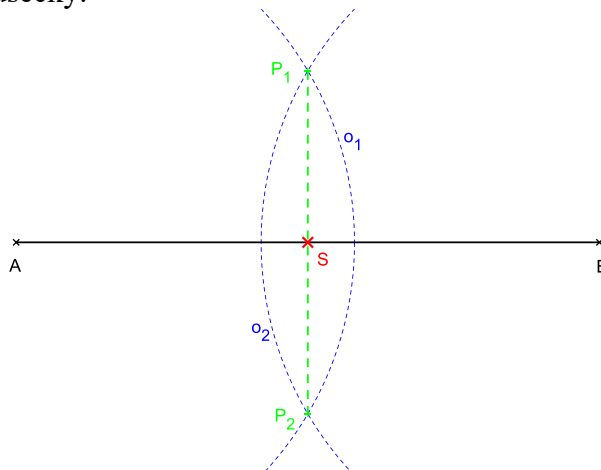
pomocou predchádzajúcich postupov vieme zostrojiť nasledujúce objekty

- stred úsečky
- os uhla
- kolmicu na priamku v danom bode (os priameho uhla) → v strede úsečky je vlastne os úsečky
- viesť s danou priamkou rovnobežnú priamku v danom bode
- preniesť daný uhol

Konštrukcia stredu úsečky

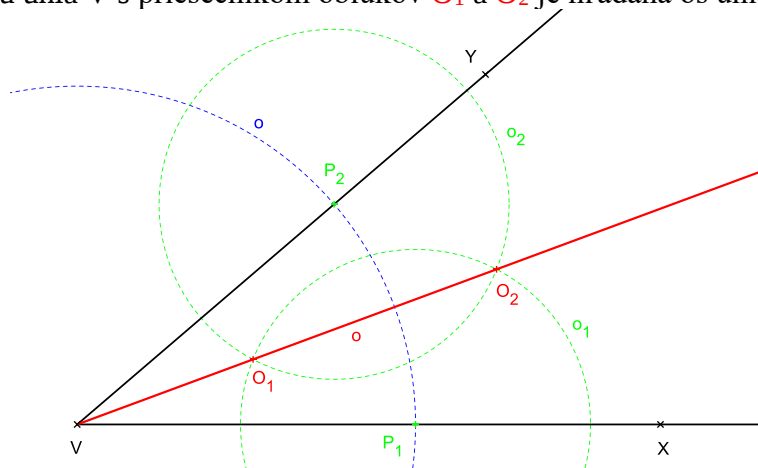
- v obidvoch krajných bodoch úsečky (A a B) narysujeme kružnicový oblúk o_1 a o_2 s rovnakým polomerom, väčším ako polovica úsečky
- spojíme priesečníky oblúkov P_1 a P_2
- priesečník spojnice s úsečkou je hľadaný stred S

P. Spojnica P_1P_2 je osou danej úsečky.



Konštrukcia osi uhla

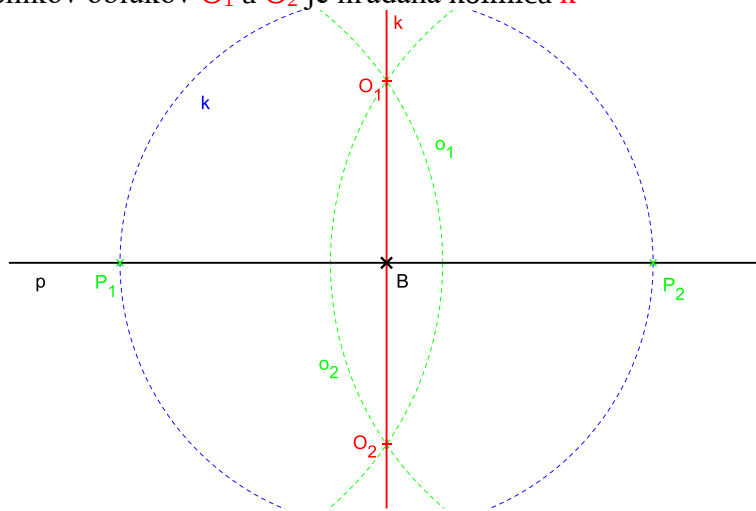
- vo vrchole V narysujeme kružnicový oblúk o s ľubovoľným polomerom
- v priesečníkoch oblúka s ramenami P_1 a P_2 narysujeme ďalšie dva oblúky o_1 a o_2 s rovnakým polomerom aby sa pretkli
- spojnica vrcholu uhla V s priesečníkom oblúkov O_1 a O_2 je hľadaná os uhla o



Konštrukcia kolmice na priamku v ľubovoľnom bode priamky alebo mimo priamky

- narysujeme kružnicu k okolo bodu B s ľubovoľným polomerom (ak bod B je mimo priamky, potom si zvolíme taký polomer, aby kružnica prechádzala priamkou)

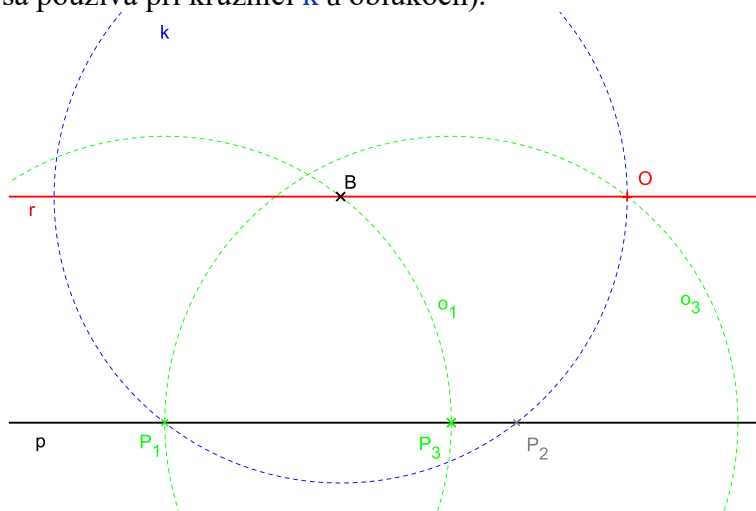
- v priesečníkoch kružnice a priamky P_1 a P_2 narysujeme dva oblúky s rovnakým polomerom o_1 a o_2 aby sa pretkli
- spojnica priesečníkov oblúkov O_1 a O_2 je hľadaná kolmica k



Konštrukcia rovnobežnej priamky v danom bode

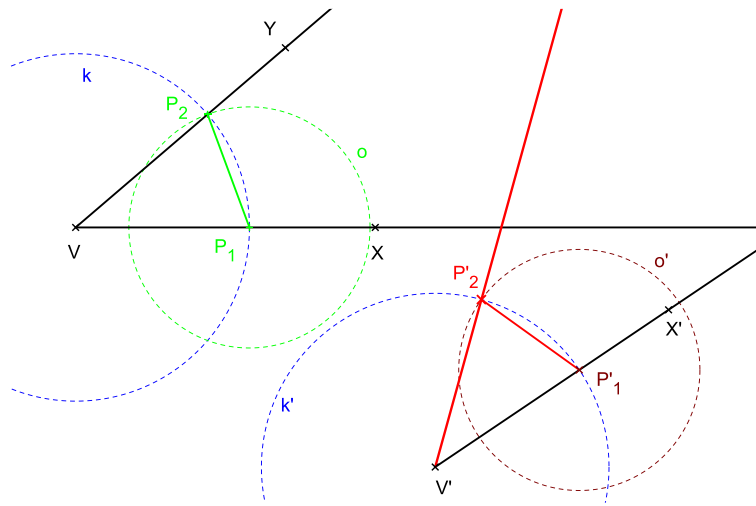
- mohli by sme konštruovať pomocou kolmíc (kolmicu na danú priamku z bodu, a znovu kolmicu na kolmicu v bode) – ale môžeme aj rýchlejším spôsobom nájsť rovnobežnú priamku
- narysujeme kružnicu k okolo bodu B s ľubovoľným polomerom, aby prechádzala priamkou
- tým istým polomerom narysujeme oblúk o_1 okolo jedného z dvoch spoločných bodov kružnice s priamkou P_1 alebo P_2
- jeden priesečník oblúka o_1 a priamky, bod P_3 bude stredom ďalšieho oblúka o_3 s pôvodným polomerom
- tak dostaneme bod O , ako priesečník o_3 s kružnicou k (druhý priesečník je samozrejme bod P_1)
- spojnica daného bodu s O je tá hľadaná rovnobežná priamka r

P. Využili sme konštrukciu kosoštvorca BP_1P_3O , kde protiľahlé strany sú rovnobežné (a všetky strany sú zhodné – to je ten polomer, ktorý sa používa pri kružnici k a oblúkoch).



Konštrukcia zhodného uhla – prenášanie uhlov

- vo vrchole V narysujeme kružnicový oblúk k s ľubovoľným polomerom
- tým istým polomerom aj okolo V' oblúk k' – vznikne bod P'_1 ako priesečník s polpriamkou $\overrightarrow{V'X'}$
- zoberme do kružidla vzdialenosť priesečníkov oblúka k s ramenami VX a VY daného uhla – úsečku P_1P_2
- narysujeme oblúk o' s tým polomerom okolo bodu P'_1
- priesečníkom oblúkov k' a o' , bodom P'_2 prechádza hľadané rameno $V'P'_2$



D. Zobrazenie je zhodné, ak vzdialenosť ľubovoľných dvoch bodov a ich obrazov je rovnaká.

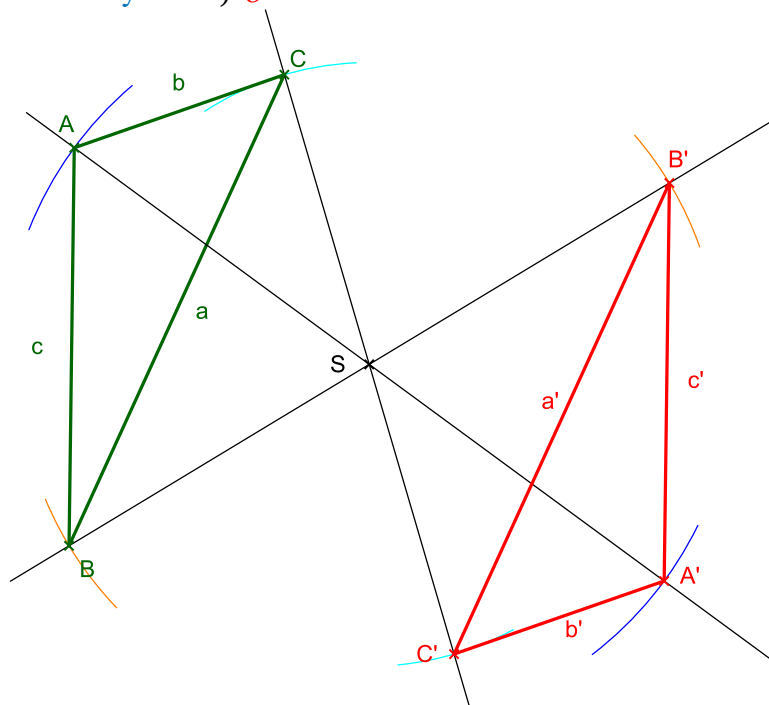
$$\forall A, B: Z(A) = A' \wedge Z(B) = B' \Rightarrow |AB| = |A'B'|$$

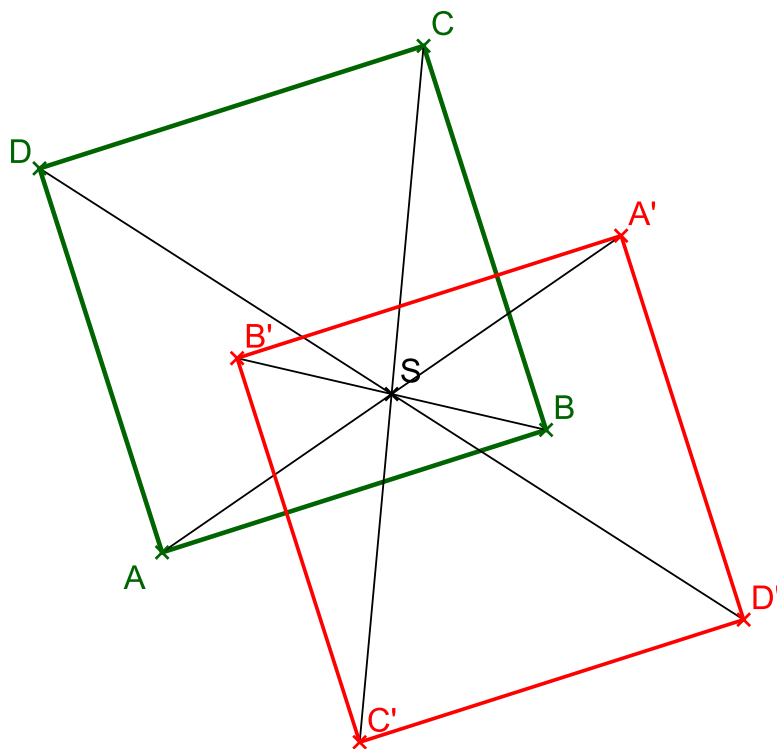
V. Zhodné zobrazenie zachováva vzdialenosti $\Rightarrow$ zachováva uhly

1. **Identické zobrazenie (identita)** $\mathcal{I}$

a, $\forall A: \mathcal{I}(A) = A$ každý bod je samodružným bodom

2. **Stredová súmernosť (centrálna symetria)** $\mathcal{S}$





a, $\exists! S: \mathcal{S}(S) = S$

b, $\forall A: \mathcal{S}(A) = A' \Rightarrow S \in AA'$

c, $\forall A: \mathcal{S}(A) = A' \Rightarrow |AS| = |SA'|$

d, $\forall A: A \neq S \Rightarrow A \neq A'$

S (stred súmernosti) je jediným samodružným bodom
 spojnice vzor-obraz prechádza stredom súmernosti
 vzor a obraz sú v rovnakej vzdialenosti od S
 vzor a obraz sú na opačných polpriamkach podľa S

$\forall A, B: \mathcal{S}(A) = A' \wedge \mathcal{S}(B) = B' \Rightarrow AB \parallel A'B'$

$\forall A: \mathcal{S}(\mathcal{S}(A)) = A$

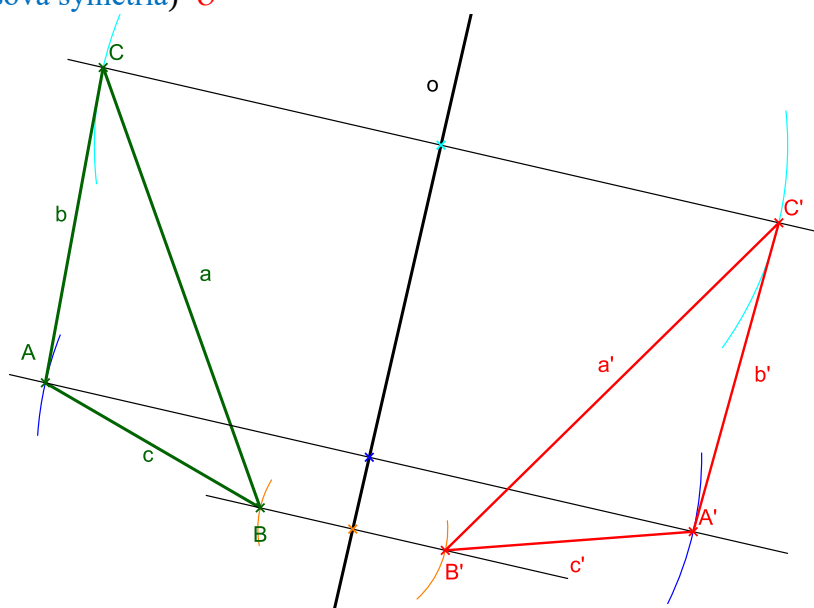
zachováva smer otáčania (orientáciu) – poradie ABC a A'B'C' sú rovnaké (v smere $\cup$ alebo proti chodu $\cap$ hodinových ručičiek)

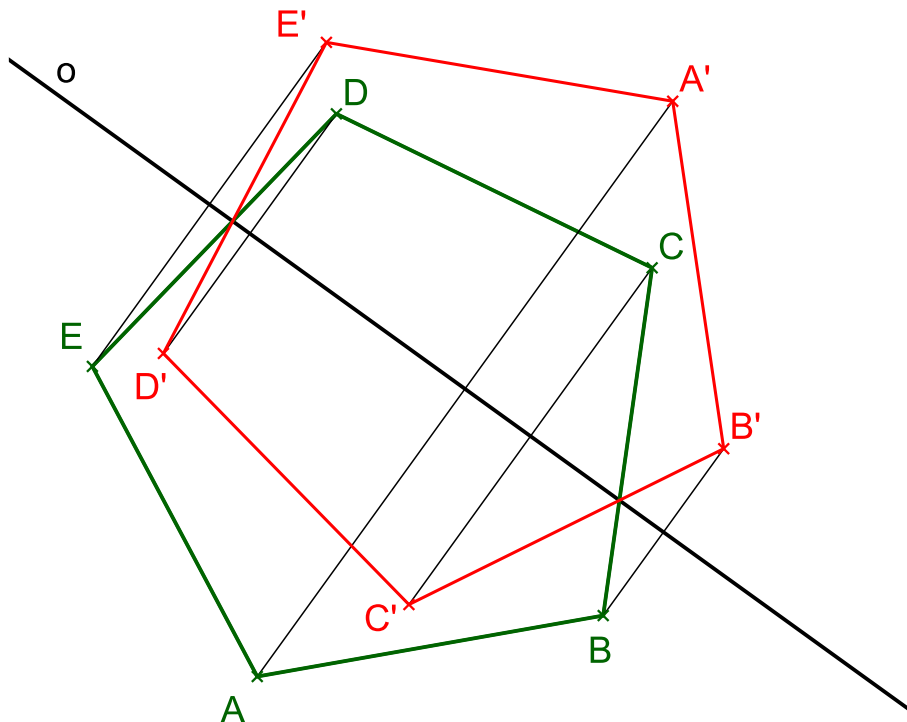
úsečka a obraz úsečky sú rovnobežné

involúcia – obraz obrazu je pôvodný vzor

S.Ú. (samodružné útvary): priamky prechádzajúce S, kružnice so stredom v S, štvorec so stredom v S, ...

3. Osová súmernosť (osová symetria) O





a, $\exists! o: \forall A \in o \Rightarrow O(A) = A$

b, $\forall A: O(A) = A' \Rightarrow AA' \perp o$

c, $\forall A: O(A) = A' \Rightarrow |Ao| = |A'o|$

d, $\forall A: A \notin o \Rightarrow A \neq A'$

každý bod osi (o) je samodružným bodom

spojnica vzor-obraz je kolmá na os

vzor a obraz sú v rovnakej vzdialenosti od osi

vzor a obraz sú v opačných polrovinách podľa o

$\forall A, B: O(A) = A' \wedge O(B) = B' \Rightarrow AB \cap A'B' \in o$

úsečka a obraz úsečky sa pretínajú na osi

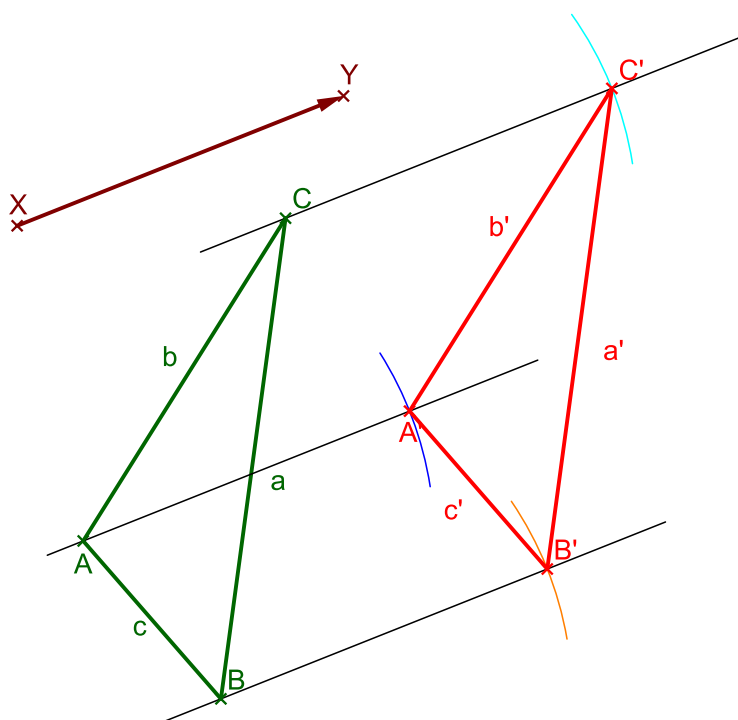
$\forall A: O(O(A)) = A$

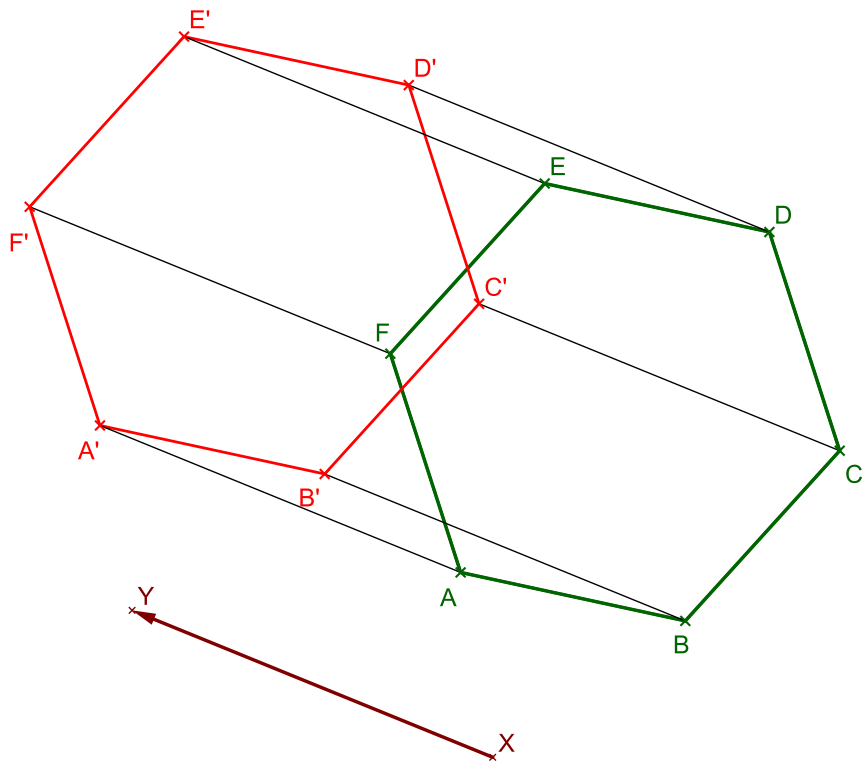
involúcia – obraz obrazu je pôvodný vzor

nezachováva smer otáčania – poradie ABC a A'B'C' sú opačné

S.Ú.: priamky kolmé na o, kružnice so stredom na o, štvorec s protiľahlými vrcholmi na o, ...

4. Posúvanie (translácia) T





a, $\forall A, B: \tau(A) = A' \wedge \tau(B) = B' \Rightarrow AA' \parallel BB'$

spojnice vzor-obraz sú navzájom rovnobežné

b, $\forall A, B: \tau(A) = A' \wedge \tau(B) = B' \Rightarrow |AA'| = |BB'|$

vzory a obrazy sú v rovnakej vzdialenosti

c, $\forall A, B: \tau(A) = A' \wedge \tau(B) = B' \Rightarrow AB \parallel A'B'$

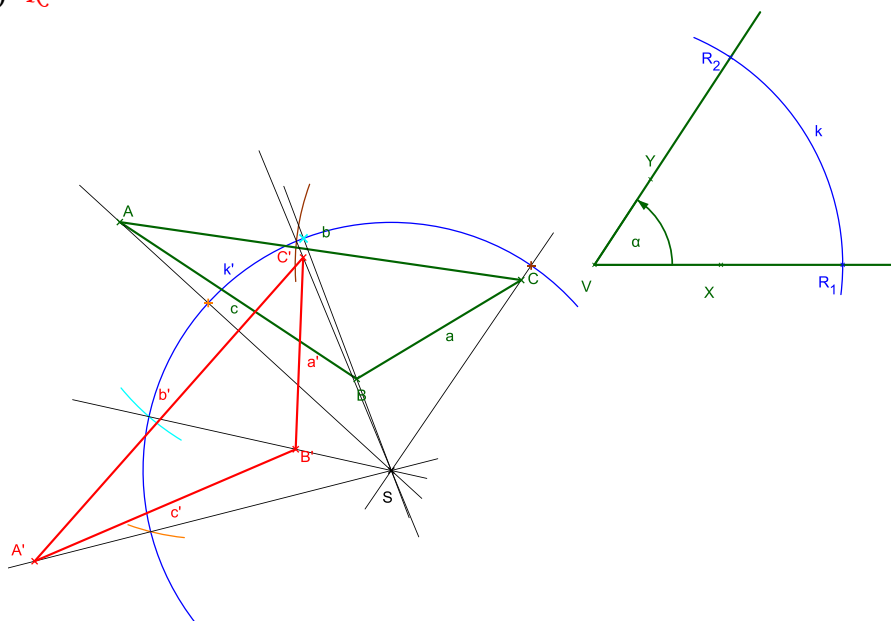
všetky obrazy sú posunuté v rovnakom smere

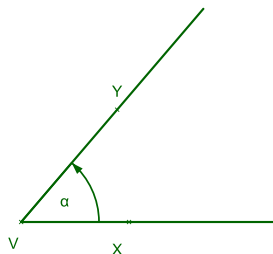
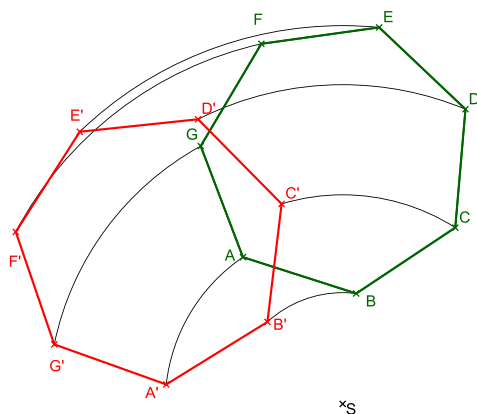
$\forall A, B: \tau(A) = A' \wedge \tau(B) = B' \Rightarrow AB \parallel A'B'$ úsečka a obraz úsečky sú rovnobežné
zachováva smer otáčania – poradie ABC a A'B'C' sú rovnaké

samodružný bod nemá

S.Ú.: jedine priamky rovnobežné so smerom posúvania

5. Otáčanie (rotácia) $\mathcal{R}$





a, $\exists! S: \mathcal{R}(S) = S$

S (stred otáčania) je jediným samodružným bodom

b, $\forall A, B: \mathcal{R}(A) = A' \wedge \mathcal{R}(B) = B' \Rightarrow |\sphericalangle ASA'| = |\sphericalangle BSB'|$

spojnice vzor-stred-obraz zvierajú rovnaký uhol

c, $\forall A: \mathcal{R}(A) = A' \Rightarrow |AS| = |A'S|$

vzor a obraz sú v rovnakej vzdialenosti od S

d, $\forall A, B: \mathcal{R}(A) = A' \wedge \mathcal{R}(B) = B' \Rightarrow |\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle A'SB'|$

všetky obrazy sú otočené v rovnakom smere

zachováva smer otáčania – poradie ABC a $A'B'C'$ sú rovnaké

S.Ú.: s ľubovoľným uhlom iba kružnice so stredom v S , špeciálne uhly – pre pravidelné mnohouholníky so stredom v S (štvorec: $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$; päťuholník: $72^\circ, 144^\circ, 216^\circ, 288^\circ, \dots$)