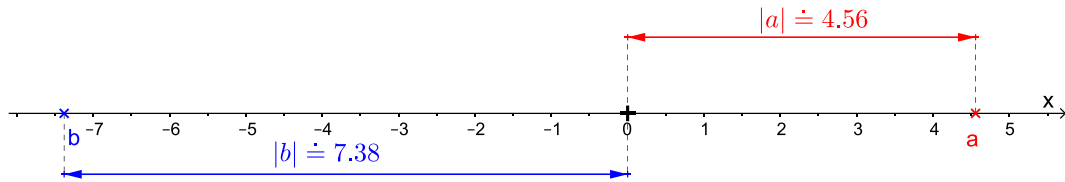


Az abszolút érték (Absolútna hodnota)

Az általános iskolai meghatározása szerint egy szám abszolút értéke az a számnak a 0-tól való távolsága a számegyenesen. Tudjuk, hogy távolságot nemnegatív számokkal mérünk, így a számok abszolút értéke pozitív számra esetleg nullára jön ki.

Bár ez a meghatározás helytálló, mégis a középiskolában más definíció használatos.



D. Egy tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ szám **abszolút értéke**:

$$|a| = \begin{cases} a; & \text{ha } a \geq 0 \\ -a; & \text{ha } a < 0 \end{cases}$$

pl.: $|3| = 3$; $|-7| = 7$; $|1\,322| = 1\,322$; $|-781| = 781$; $|0| = 0$

T.

- a, $|a| \geq 0$
- b, $|a| = |-a|$
- c, $a \leq |a|$
- d, $|a + b| \leq |a| + |b|$ – háromszög-egyenlőtlenség
- e, $||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$
- f, $|a| = \sqrt{a^2}$
- g, $|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \Rightarrow |a^n| = |a|^n$, ahol $n \in \mathbb{N}$
- h, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$

Vagyis egy szám abszolút értékének meghatározása nem jelent gondot.

Viszont mit tegyünk, ha abszolút értéket tartalmazó (az ismeretlen abszolút értéken belül szerepel) egyenletet, egyenlőtlenséget, vagy ezek rendszerét szeretnénk megoldani? Az abszolút értéket eltávolítani csak négyzetre emeléssel lehetne, ami viszont nem ekvivalens átalakítása az egyenletnek – új megoldás (megoldások) adódhat, mely az eredeti egyenletnek nem megoldása. En nem lenne gond $\rightarrow$ próbával ki tudjuk zárni a nem megfelelő megoldásokat (lásd majd másodikban az irracionális egyenleteknél). A gond az, hogy hatványozásnál megduplázódik az egyenlet fokszáma (lineáris egyenletből másodfokú; másodfokúból negyedfokú; ... keletkezik) és ezzel bonyolultabb egyenletet kapunk, melynek megoldása a nagyobb probléma – ráadásul magasabbfokú egyenleteket pedig általában meg sem tudunk oldani.

A kifejezések előjel szempontjából pontosan úgy viselkednek mint a számok (az ismeretlen/ismeretlenek helyére behelyettesített számtól/számoktól függően), lehetnek pozitívak, nulla vagy negatívak. Ezért két esetet különböztetünk meg (ha példánk csak egy abszolút értéket tartalmaz):

- egyszer azt feltételezzük, hogy kifejezésünk nemnegatív értéket vesz fel – ezen feltevés mellett a kifejezésünk abszolút értéke (hasonlóan a nemnegatív számokéhoz) megegyezik a kifejezéssel $\rightarrow$ az abszolút értéket egyszerű zárójelre változtatjuk
- a megoldásunk másik ága abból indul ki, hogy kifejezésünk negatív értéket vesz fel – ezen feltevés mellett a kifejezésünk abszolút értéke (hasonlóan a negatív számokéhoz) egyenlő az ellentett kifejezéssel (vagyis -1-szerese) $\rightarrow$ az abszolút értéket egyszerű zárójelre változtatjuk és elé írunk egy -1-es szorzót

Mindkét feltevés mellett megoldjuk egyenletünket. A kapott eredményt összevetjük a feltevéssel, metszetük adja a részleges megoldást. A teljes megoldás pedig a részmegoldások uniója lesz.

pl.

Oldjuk meg az alábbi egyenletet: $|x - 1| + 2x = 14$

először a feltevés – alatta pedig a megoldás

a megoldás második oszlopában a másik feltevés majd a megoldás látható

I.

$$x - 1 \geq 0$$

$$x \geq 1$$

$$(x - 1) + 2x = 14$$

$$x - 1 + 2x = 14$$

$$3x - 1 = 14$$

$$3x = 15$$

$$x = 5$$

$$5 \geq 1$$

⇒ az 5 megoldás

II.

$$x - 1 < 0$$

$$x < 1$$

$$-1 \cdot (x - 1) + 2x = 14$$

$$-x + 1 + 2x = 14$$

$$x + 1 = 14$$

$$x = 13$$

$$13 < 1$$

⇒ a 13 nem megoldás

vagyis a teljes megoldás a kettő egyesítése: csak az 5

Ha példánk (egyenlet, egyenlőtlenség, egyenletrendszer, egyenlőtlenség-rendszer) több abszolút értéket tartalmaz (a rendszer egyik egyenletében vagy egyenlőtlenségében), és ezekből az egyik nem számszorosa a másiknak [mint például: $|2x - 3|$ és a $|12 - 8x|$], akkor több feltevésünk lesz. Két abszolút érték a számegyenest három részre osztja. Mindkét abszolút értékbeli kifejezés más helyen vált előjelet (más számok). Vagyis a két abszolút érték máshogy viselkedik a kisebb szám előtt, máshogy a két érték között és máshogy a nagyobbik szám után. Ezért a megoldás három ágon folyik – három részleges megoldás.

Három abszolút érték négy részre, négy abszolút érték öt részre, ... osztja a számegyenest és ezzel a megoldás menetét is.

Az abszolút érték szintén létezik mint függvény is.

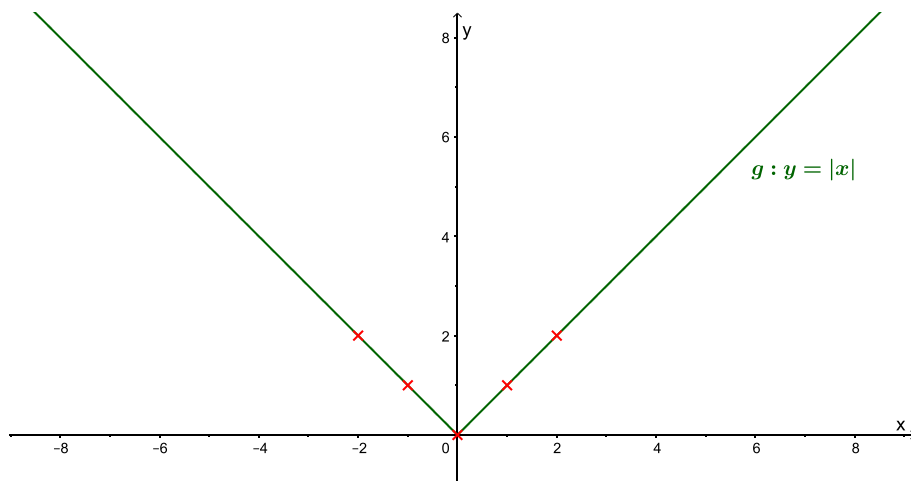
$$f: y = a \cdot |x + b| + c \quad a; b; c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$$

„csúcának“ koordinátái: $V(-b; c)$

az alapfüggvény: $g: y = |x|$

$$a = 1; b = c = 0$$

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	0	1	2



az a szám hatása a grafikonra

$$f: y = |x|$$

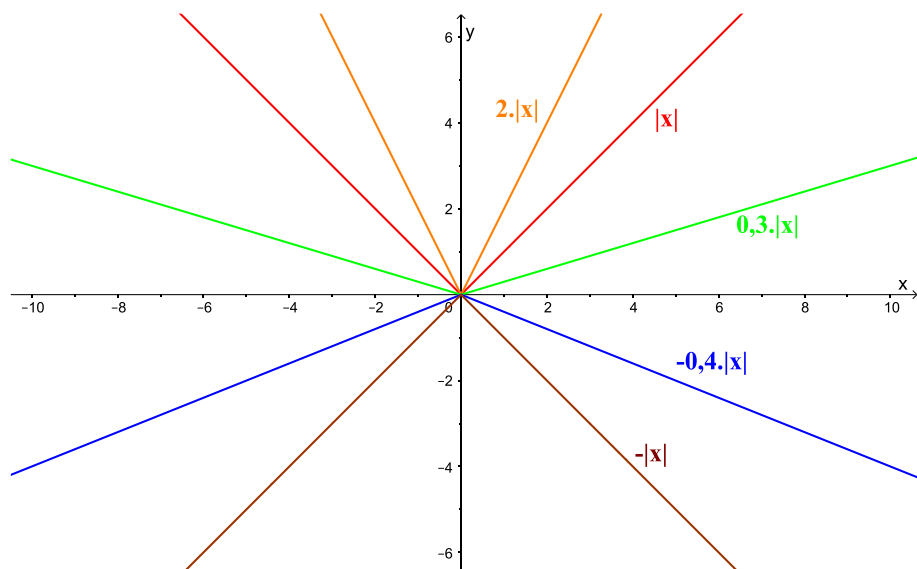
$$g: y = 2 \cdot |x|$$

$$h: y = 0,3 \cdot |x|$$

$$i: y = -0,4 \cdot |x|$$

$$j: y = -|x|$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$ x $	3	2	1	0	1	2	3
$2 \cdot x $	6	4	2	0	2	4	6
$0,3 \cdot x $	0,9	0,6	0,3	0	0,3	0,6	0,9
$-0,4 \cdot x $	-1,2	-0,8	-0,4	0	-0,4	-0,8	-1,2
$- x $	-3	-2	-1	0	-1	-2	-3

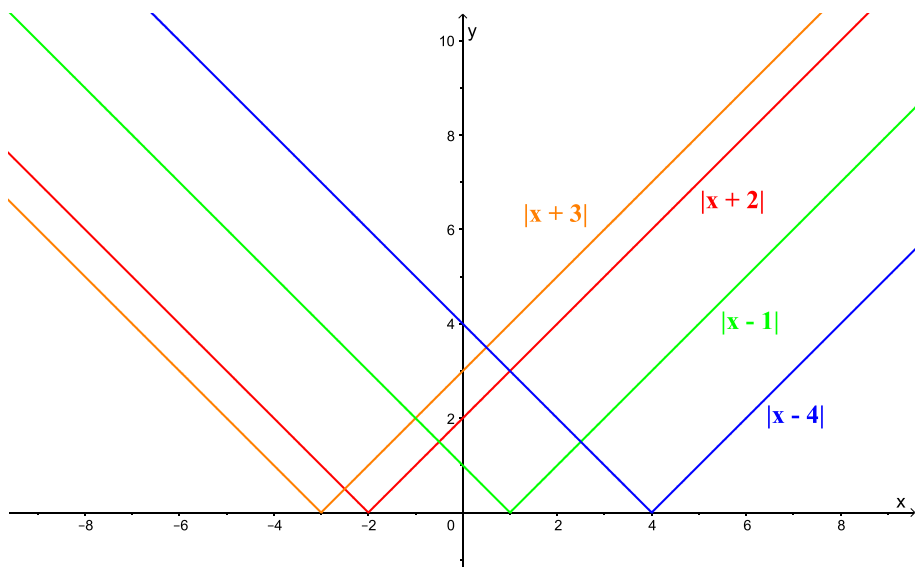


az a szám a függvény **alakját és monotonitását** befolyásolja

b szám hatása a grafikonra

$f: y = |x + 2|$ $g: y = |x + 3|$ $h: y = |x - 1|$ $i: y = |x - 4|$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$ x + 2 $	1	0	1	2	3	4	5
$ x + 3 $	0	1	2	3	4	5	6
$ x - 1 $	4	3	2	1	0	1	2
$ x - 4 $	7	6	5	4	3	2	1

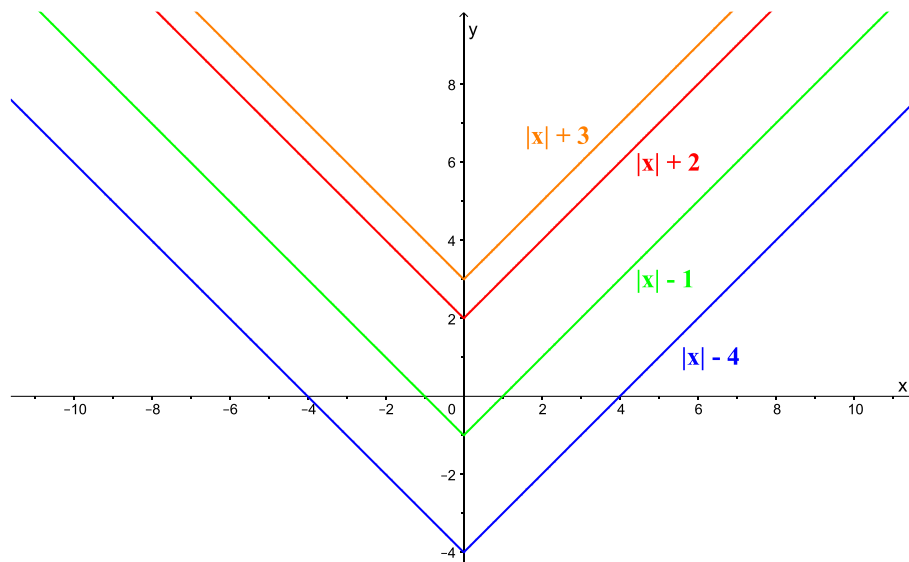


a b szám a függvény **helyét** befolyásolja $\rightarrow$ eltolja az x tengely irányában $-b$ -vel

c szám hatása a grafikonra

$f: y = |x| + 2$ $g: y = |x| + 3$ $h: y = |x| - 1$ $i: y = |x| - 4$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$ x + 2$	5	4	3	2	3	4	5
$ x + 3$	6	5	4	3	4	5	6
$ x - 1$	2	1	0	-1	0	-1	2
$ x - 4$	-1	-2	-3	-4	-3	-2	-1



a c szám a függvény **helyét** befolyásolja $\rightarrow$ eltolja az y tengely irányában c -vel

$D_f = \mathbb{R}$

$$H_f = \begin{cases} \langle c; \infty \rangle, & \text{ha } a > 0 \\ (-\infty; c), & \text{ha } a < 0 \end{cases}$$

G. két félegyenes közös kezdőponttal („csúcs“)

M. $a > 0$ esetén $\begin{cases} x \in (-\infty; -b) \text{ m. } \downarrow \\ x \in (-b; \infty) \text{ m. } \uparrow \end{cases}$
 $a < 0$ esetén $\begin{cases} x \in (-\infty; -b) \text{ m. } \uparrow \\ x \in (-b; \infty) \text{ m. } \downarrow \end{cases}$

Z.H.

$$\begin{aligned} y &= a|x + b| + c \\ 0 &= a|x + b| + c & /-c \\ -c &= a|x + b| & /:a \\ -\frac{c}{a} &= |x + b| \end{aligned}$$

I.

$$\begin{aligned} -\frac{c}{a} &= x + b \\ -\frac{c}{a} - b &= x_1 \\ x_1 &= \frac{-c - ab}{a} \end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned} -\frac{c}{a} &= -(x + b) \\ \frac{c}{a} &= x + b \\ \frac{c}{a} - b &= x_2 \\ x_2 &= \frac{c - ab}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= a|x + b| + c \\ y &= a|0 + b| + c \\ y &= a|b| + c \end{aligned}$$

ha $a \cdot c > 0 \Rightarrow \nexists X_1; X_2$ – ha az a és a c azonos előjelűek, nincs közös pontja az x tengellyel

ha $a \cdot c < 0 \Rightarrow \exists X_1\left(\frac{-ab - c}{a}; 0\right); X_2\left(\frac{-ab + c}{a}; 0\right)$

$Y(0; a|b| + c)$

Sz.É. $a > 0$ esetén az $x_0 = -b$ pontban globális minimuma van
 $a < 0$ esetén az $x_0 = -b$ pontban globális maximuma van