

Halmazok

(Množiny)

alfogalom: **halmaz**

a halmaz – pontosan meghatározott objektumok összessége; miközben bármiről egyértelműen eldönthető, hogy a halmazhoz tartozik vagy sem

jelölés: nagy nyomtatott betűk (esetleg írott)

elemek (prvky) – a halmazban lévő objektumok

$a \in A$ – az a elem benne van az A halmazban

$b \notin A$ – b nem eleme az A halmaznak

a halmaz elemeinek számát tekintve lehet:

véges: véges számú elemmel rendelkező

végtelen: végtelen számú eleme van

megszámlálhatóan végtelen ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$)

nem megszámlálhatóan végtelen (kontinuum) ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$)

különleges halmazok (elemeik számát tekintve)

üres halmaz (prázdna množina) – nem tartalmaz elemet: $\emptyset$ vagy $\{\}$

$\forall a: a \notin \emptyset$

$\forall A: A \neq \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset A$

alaphalmaz – **univerzális halmaz** (základná množina – univerzálna) – bele tartozik „minden”: U

$\forall A: A \subset U$

számosság – **kardinális szám** (mohutnosť – kardinalita) – a halmaz elemeinek száma: $|A|$ vagy **card** (A)

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ (alef)

$|\mathbb{R}| = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$

$\mathfrak{c} > \aleph_0$

halmaz megadásának módja

a, az elemek felsorolásával: $A = \{2; 7; 13; 27; 41\}$ – csak véges halmazt

b, az elemek közös tulajdonságaival: $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 3 < n \leq 15\}$

c, más halmazokból halmazműveletekkel: $A \cap B$

Venn diagram – **halmazábra**: a halmazok grafikus ábrázolása

halmazműveletek

1, **halmazok egyenlősége** (rovnosť množín) – pontosan ugyanazokat az elemeket tartalmazzák

$A = B := (\forall a: a \in A \Rightarrow a \in B) \wedge (\forall b: b \in B \Rightarrow b \in A)$

$|A| = |B|$

2a, **részhalmaz** (podmnožina) – a részhalmaz minden eleme az őt tartalmazó halmaz eleme is

$A \subseteq B := \{\forall a \mid a \in A \Rightarrow a \in B\}$

hatványhalmaz (potenčná množina) – a halmaz összes részhalmazának halmaza:

$\mathcal{P}(A) := \{H \mid H \subseteq A\}$

$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

triviális részhalmazok (triviálne podmnožiny) – minden nem üres halmaz részhalmazai:

üres halmaz és **maga a halmaz**

$\forall A \neq \emptyset: \emptyset \subseteq A \wedge A \subseteq A$

2b, valódi részhalmaz (vlastná podmnožina)

$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$

3, **halmazok metszete** (prienik množín) – a két halmaz közös elemeit tartalmazza

$A \cap B := \{\forall a \mid a \in A \wedge a \in B\}$

diszjunkt halmazok (disjunktné množiny) – nincs közös elemük

$A \cap B = \emptyset$

4, **halmazok egyesítése** – **unió** (zjednotenie množín – únia) – a két halmaz összes eleme

$A \cup B := \{\forall a \mid a \in A \vee a \in B\}$

5, **halmazok különbsége** (rozdiel množín) – azon elemek, melyek csak az első halmazban vannak (a másodikban nem)

$A \setminus B := \{\forall a \mid a \in A \wedge a \notin B\} \wedge B \not\subset A$

olvasd: „A a B nélkül“

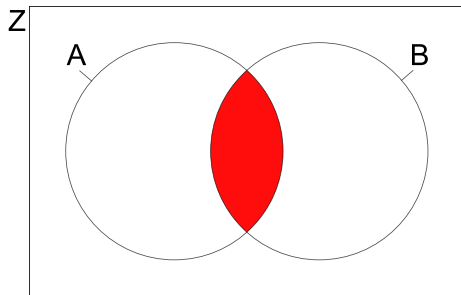
- 6, **halmazok szimmetrikus különbsége** (symetrická diferencia množín) – azon elemek, melyek csak az egyik halmazban vannak

$$A \Delta B := \{\forall a, b | (a \in A \wedge a \notin B) \vee (b \in B \wedge b \notin A)\} \equiv \\ \equiv (A \cup B) \setminus (A \cap B) \equiv (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

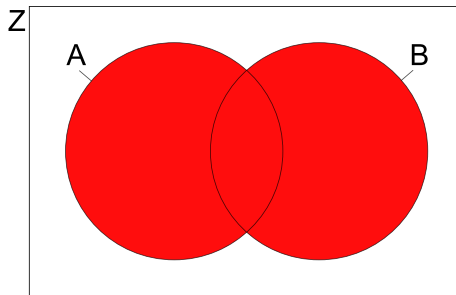
- 7, **kiegészítő halmaz – komplementer** (doplňková množina, komplement) – azon elemek, melyek csak a tartalmazó halmazban vannak (a részhalmazban nem)

$$C_B A := \{\forall a | a \in A \wedge a \notin B\} \wedge B \subset A$$

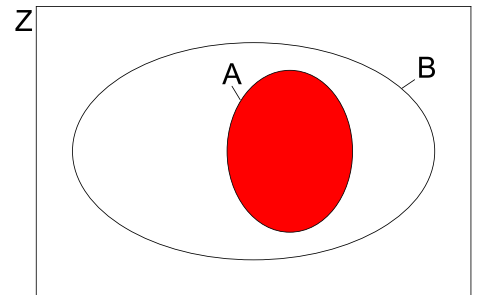
olvasd: „a B halmaz kiegészítő halmaza az A halmazban“



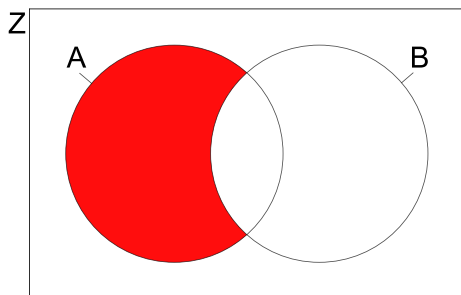
$A \cap B$



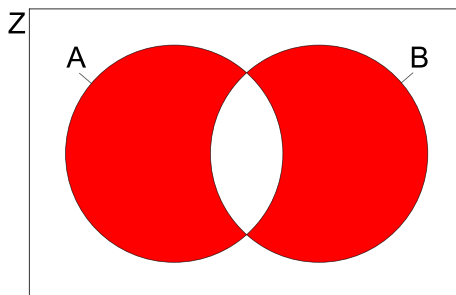
$A \cup B$



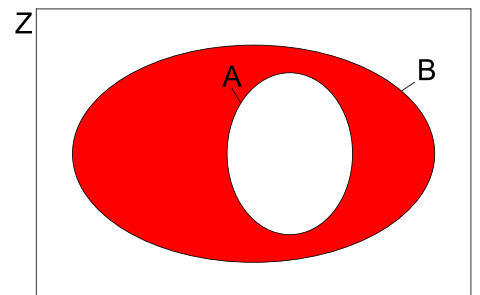
$A \subset B$



$A \setminus B$



$A \Delta B$ vagy $A \odot B$



$C_B A$

példa:

Adott: $A = \{1; 2; 3\}$. Határozzuk meg az A halmaz összes részhalmazát.

$$A_i \subset A: i \in \mathbb{N}$$

$$A_1 = \{\}$$

$$A_2 = \{1\}$$

$$A_5 = \{1; 2\}$$

$$A_8 = \{1; 2; 3\}$$

$$A_3 = \{2\}$$

$$A_6 = \{1; 3\}$$

$$A_4 = \{3\}$$

$$A_7 = \{2; 3\}$$

Adott: $B = \{a; b; c; d; e\}$. Határozzuk meg a B halmaz összes részhalmazát.

$$B_i \subset B: i \in \mathbb{N}$$

$$B_1 = \{\}$$

$$B_2 = \{a\}$$

$$B_7 = \{a; b\}$$

$$B_{12} = \{b; d\}$$

$$B_{17} = \{a; b; c\}$$

$$B_{22} = \{a; d; e\}$$

$$B_{27} = \{a; b; c; d\}$$

$$B_{30} = \{a; c; d; e\}$$

$$B_{32} = \{a; b; c; d; e\}$$

$$B_3 = \{b\}$$

$$B_8 = \{a; c\}$$

$$B_{13} = \{b; e\}$$

$$B_{18} = \{a; b; d\}$$

$$B_{23} = \{b; c; d\}$$

$$B_{28} = \{a; b; c; e\}$$

$$B_{31} = \{b; c; d; e\}$$

$$B_4 = \{c\}$$

$$B_9 = \{a; d\}$$

$$B_{14} = \{c; d\}$$

$$B_{19} = \{a; b; e\}$$

$$B_{24} = \{b; c; e\}$$

$$B_{28} = \{a; b; c; e\}$$

$$B_{31} = \{b; c; d; e\}$$

$$B_5 = \{d\}$$

$$B_{10} = \{a; e\}$$

$$B_{15} = \{c; e\}$$

$$B_{20} = \{a; c; d\}$$

$$B_{25} = \{b; d; e\}$$

$$B_{29} = \{a; b; d; e\}$$

$$B_6 = \{e\}$$

$$B_{11} = \{b; c\}$$

$$B_{16} = \{d; e\}$$

$$B_{21} = \{a; c; e\}$$

$$B_{26} = \{c; d; e\}$$

Adottak: $A = \{1; 4; 7; 9; 12\}$; $B = \{-3; 0; 2; 4\}$. Határozzuk meg az alábbi műveletek eredményét:

a, $A \cap B$

b, $A \cup B$

c, $A \setminus B$

d, $B \setminus A$

$$A \cap B = \{4\}$$

$$A \cup B = \{-3; 0; 1; 2; 4; 7; 9; 12\}$$

$$A \setminus B = \{1; 7; 9; 12\}$$

$$B \setminus A = \{-3; 0; 2\}$$

Adottak: $A = \{2; 4; 6; 8; 10\}$; $B = \{1; 3; 5; 7\}$; $C = \{2; 3; 5; 7; 11; 13\}$; $D = \{1; 2; 3; 5; 8; 13; 21\}$. Határozzuk meg számosságukat, metszeteiket, egyesítéseiket és minden lehetséges különbségüket.

$$|A| = 5$$

$$|B| = 4$$

$$|C| = 6$$

$$|D| = 7$$

$$A \cap B = \{\}$$

$$A \cap C = \{2\}$$

$$A \cap D = \{2; 8\}$$

$$B \cap C = \{3; 5; 7\}$$

$$B \cap D = \{1; 3; 5\}$$

$$C \cap D = \{2; 3; 5; 13\}$$

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 10\}$$

$$A \cup C = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 10; 11; 13\}$$

$$A \cup D = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 13; 21\}$$

$$B \cup C = \{1; 2; 3; 5; 7; 11; 13\}$$

$$B \cup D = \{1; 2; 3; 5; 7; 8; 13; 21\}$$

$$C \cup D = \{1; 2; 3; 5; 7; 8; 11; 13; 21\}$$

$$A \setminus B = \{2; 4; 6; 8; 10\}$$

$$B \setminus A = \{1; 3; 5; 7\}$$

$$A \setminus C = \{4; 6; 8; 10\}$$

$$C \setminus A = \{3; 5; 7; 11; 13\}$$

$$A \setminus D = \{4; 6; 10\}$$

$$D \setminus A = \{1; 3; 5; 13; 21\}$$

$$B \setminus C = \{1\}$$

$$C \setminus B = \{2; 11; 13\}$$

$$B \setminus D = \{7\}$$

$$D \setminus B = \{2; 8; 13; 21\}$$

$$C \setminus D = \{7; 11\}$$

$$D \setminus C = \{1; 8; 21\}$$

A városban két képzállítást látogatható. Az egyik napon az első kiállítást 320-an, a másodikat 216 látogató kereste fel, melyből 152-en csak a másodikat látták. Hányan látták csak az első kiállítást?

$$|B| = |B \setminus A| + |A \cap B|$$

$$216 = 152 + |A \cap B|$$

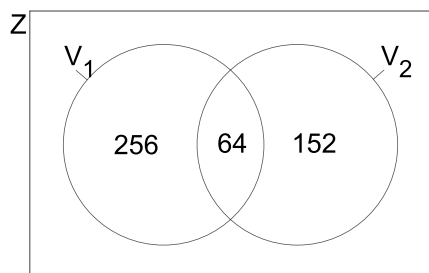
$$64 = |A \cap B|$$

$$|A| = |A \setminus B| + |A \cap B|$$

$$320 = |A \setminus B| + 64$$

$$256 = |A \setminus B|$$

vagy grafikusan



Adottak: $A = \{-5; -3; -2; 0; 3; 4; 6; 7\}$, $B = \{b \in \mathbb{N} \mid b \text{ páros szám} \wedge b \leq 4\}$. Határozzuk meg az alábbi halmazok elemeit:

$$a, A \cap B$$

$$b, A \cup B$$

$$c, A \setminus B$$

$$d, B \setminus A$$

Adottak: $A = \{-1; 0; 2; 5; 6; 7; 10; 11; 15\}$, $B = \{b \in \mathbb{Z} \mid b \text{ osztható } 3\text{-mal}\}$. Határozzuk meg az alábbi halmazok elemeit:

$$a, A \cap B$$

$$b, A \cup B$$

$$c, A \setminus B$$

$$d, B \setminus A$$

Adottak: $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leq n < 20\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 5 < n \leq 18\}$, $C = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 < n \leq 8\}$. Határozzuk meg az alábbi halmazok elemeit:

$$a, A \cap B$$

$$b, B \cup C$$

$$c, C \setminus A$$

Az iskolában három szakkör működik: fotós, motoros és sakk. Az egyik osztály minden tanulója jár valamelyik szakkörbe. Fotósba 16, motorosba 17, sakkozni 14 diák. Nyolcan látogatják a fotós és a motoros kört, hatan a

fotóst és a sakk-kört is, illetve négyen a motoros és a sakk-körbe is járnak. Hárman mindhárom szakkört látogatják. Mennyi tanulója van az osztálynak?