

Irracionális egyenletek (Iracionalne rovnice)

D. Az egyenlet **irracionális**, ha ismeretlent tartalmaz gyökkifejezésben.

M. Ha a gyökmennyiség páros gyökkitevőjű, akkor meg kell határozni az értelmezési tartomány $\Leftarrow$ a gyökalapba nem kerülhet negatív érték (kifejezés)

a feltételt (feltételeket) egyszer húzzuk alá – dokumentumaimban helyette a szürke kiemelést használok

$$\begin{aligned}\sqrt{2x+8}+8 &= x \\ 2x+8 &\geq 0 & /-8 \\ 2x &\geq -8 & /:2 \\ x &\geq -4\end{aligned}$$

miután bebiztosítottuk a kifejezéseink kiszámíthatóságát, elkezdhetjük az átalakításokat

El kell tüntetnünk a gyökkifejezést $\rightarrow$ az **egyenlet hatványozásával**. Csakhogy a hatványozás nem tartozik az egyenletek ekvivalens átalakítási közé.

pl.

$$\begin{aligned}\sqrt{x+2} &= x-10 \\ \text{behelyettesítve } x &= 7\text{-et} \\ \text{B: } \sqrt{7+2} &= \sqrt{9} = 3 \\ \text{J: } 7-10 &= -3 \\ \text{B} &\neq \text{J}\end{aligned}$$

de ha négyzetre emeljük

$$\begin{aligned}x+2 &= x^2-20x+100 \\ \text{és újra behelyettesítünk } x &= 7\text{-et} \\ \text{B: } 7+2 &= 9 \\ \text{J: } 7^2-20\cdot 7+100 &= 49-140+100 = 9 \\ \text{B} &= \text{J}\end{aligned}$$

M. Az egyenlet hatványozásával újabb megoldás adódhat, mely azonban az eredeti egyenletnek nem kell, hogy megoldása legyen. Ezért **mindig végre kell hajtunk az ellenőrzést (próbát)**.

Ha az egyenlet csak egy gyökmennyiséget tartalmaz, akkor úgy alakítjuk egyenletünket, hogy a gyökkifejezés egyedül álljon valamelyik oldalon.

$$\begin{aligned}\sqrt{2x+8}+8 &= x & /-8 \\ \sqrt{2x+8} &= x-8 & /()^2 \\ 2x+8 &= x^2-16x+64 & /-2x-8\end{aligned}$$

másodfokú egyenletünket nullára redukáljuk

$$0 = x^2 - 18x + 56$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 56}}{2 \cdot 1} = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 224}}{2} = \frac{18 \pm 10}{2} = \begin{matrix} 14 \\ 4 \end{matrix}$$

mindkét eredmény kielégíti a feltételt – elméletileg lehetnek megoldásai az egyenletnek, de el kell végeznünk az ellenőrzést

$$\begin{aligned}\text{B: } \sqrt{2 \cdot 14} + 8 &= \sqrt{36} + 8 = 6 + 8 = 14 \\ \text{J: } 14 \\ \text{B} &= \text{J} \Rightarrow x = 14 \text{ megoldás} \\ \text{B: } \sqrt{2 \cdot 4} + 8 &= \sqrt{16} + 8 = 4 + 8 = 12 \\ \text{J: } 4 \\ \text{B} &\neq \text{J} \Rightarrow x = 4 \text{ nem megoldás}\end{aligned}$$

Ha az egyenlet több gyökkifejezést tartalmaz, akkor az első hatványozás után nem tűnik el az összes gyökmennyiség $\Leftarrow$ kétagú kifejezést négyzetre emelve a középső tagban megmarad a gyökkifejezés:

$$(a + \sqrt{\text{kifejezés}})^2 = a^2 + 2a \cdot \sqrt{\text{kifejezés}} + \text{kifejezés}$$

Ha már csak egy gyökmennyiség maradt, akkor őt önállósíjuk valamelyik oldalra, majd újra hatványozzuk egyenletünket.

példa:

$$\sqrt{5x+20} + \sqrt{x+8} = 2$$

$$5x + 20 \geq 0$$

$$5x \geq -20$$

$$x \geq -4$$

$$x + 8 \geq 0$$

$$x \geq -8$$

$$\sqrt{5x+20} + \sqrt{x+8} = 2$$

$$/()^2$$

$$5x + 20 + 2\sqrt{5x+20}\sqrt{x+8} + x + 8 = 4$$

$$6x + 28 + 2\sqrt{(5x+20)(x+8)} = 4$$

$$/-6x - 28$$

$$2\sqrt{(5x+20)(x+8)} = -6x - 24$$

$$/:2$$

$$\sqrt{(5x+20)(x+8)} = -3x - 12$$

$$/()^2$$

$$(5x+20)(x+8) = 9x^2 + 72x + 144$$

$$5x^2 + 40x + 20x + 160 = 9x^2 + 72x + 144$$

$$5x^2 + 60x + 160 = 9x^2 + 72x + 144$$

$$/-5x^2 - 60x - 160$$

$$0 = 4x^2 + 12x - 16$$

$$/:4$$

$$0 = x^2 + 3x - 4$$

$$0 = (x+4)(x-1)$$

$$x_1 = -4$$

$$x_2 = 1$$

$$B: \sqrt{5 \cdot (-4) + 20} + \sqrt{-4 + 8} = \sqrt{-20 + 20} + \sqrt{4} = 0 + 2 = 2$$

$$J: 2$$

$$B = J \Rightarrow x = -4 \text{ megoldás}$$

$$B: \sqrt{5 \cdot 1 + 20} + \sqrt{1 + 8} = \sqrt{5 + 20} + \sqrt{9} = 5 + 3 = 8$$

$$J: 2$$

$$B \neq J \Rightarrow x = 1 \text{ nem megoldás}$$

Oldjuk meg az egyenletet:

$$a, \sqrt{x^2 - 7} = 3$$

$$b, \sqrt{x} + 1 = 2x$$

$$c, \sqrt{x} + 6 = x$$

$$d, \sqrt{x+1} + 1 = x$$

$$e, \sqrt{x^2 - 12} = \sqrt{x}$$

$$f, \sqrt{x+2} = \sqrt{8-x^2}$$

Oldjuk meg az egyenletet:

$$a, \sqrt{x^2 + 9} = 2x - 3$$

$$b, \sqrt{x^2 - 9} = 3x - 11$$

$$c, \sqrt{2x-11} - \sqrt{x-1} = 1$$

$$d, \sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} = 5$$

$$e, \sqrt{5x+20} + \sqrt{x+8} = 2$$

$$f, \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 1$$